Invent. math. 111, 627–670 (1993)

Inventiones mathematicae

Temps de vie des solutions régulières des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux

Serge Alinhac

Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France

Oblatum 2-XII-1991 & 24-IX-1992

Summary. We consider the $2D$ isentropic Euler equations; for rotationnally invariant data which are a perturbation of size ε of a rest state, we establish the first term asymptotic of the life span T_ε of the classical solution ($\lim \varepsilon^2 T_\varepsilon = \tau_*^2$).

Moreover, we give, for $t \leqq \frac{A^2}{\varepsilon^2} (A < \tau_*)$ an estimate of the true solution, by computing the size of its difference with an approximate solution obtained in a previous work.

Résumé. Nous considérons le système des équations d'Euler isentropiques en dimension deux; pour des données initiales invariantes par rotation et perturbations de taille ε d'un état de repos, on établit un équivalent du temps de vie T_ε de la solution classique ($\lim \varepsilon^2 T_\varepsilon = \tau_*^2$).

De plus, on donne, pour $t \leqq \frac{A^2}{\varepsilon^2} (A < \tau_*)$ une estimation de la vraie solution, en calculant la taille de son écart à une solution approchée construite dans un précédent travail.

Introduction

1. Dans ce travail, nous considérons le système des équations d'Euler compressibles en dimension deux, dans le cas isentropique (avec une loi d'état quelconque) et pour des données initiales invariantes par rotation.

De nombreux articles ont été consacrés à ce système: on pourra consulter par exemple Courant-Friedrichs [4], Majda [11] et les références données dans ces ouvrages.

Nous supposons ici que les données initiales sont des perturbations C^∞ à supports compacts, de taille ε, d'un état de repos où la vitesse v du fluide est nulle et sa densité ρ constante.

Comme l'a montré Sidéris [12], les solutions d'un tel système ne peuvent en général demeurer classiques pour tout temps, en contraste avec ce qui se passe dans le cas d'un fluide incompressible.

Nous donnons dans cet article un équivalent du temps de vie T_ε de la solution, ainsi qu'une description approchée de cette solution et une estimation des restes.

2. La méthode de la preuve est celle développée dans le travail d'Hörmander sur les équations d'ondes non linéaires [5, 6]: construction d'une solution approchée en temps grand du problème, puis estimation des restes à l'aide d'inégalités d'énergie utilisant les «champs $\mathbb{Z}$» de Klainerman [9].

La construction de la solution approchée, à cause de son caractère technique, est présentée à part dans [1]; pour l'intelligence du texte et la commodité du lecteur, on a rappelé ici les résultats principaux de cette étude (§1.3).

Le phénomène nouveau apparaissant dans le cas des équations d'Euler est une rétention de fluide sur le support du tourbillon initial, ce qui se traduit mathématiquement par la présence d'un terme stationnaire de taille ε^2 dans la formule de la densité.

Ce phénomène semble exclure la possibilité d'utiliser les «champs $\mathbb{Z}$», et impose l'obtention d'une solution approchée beaucoup plus précise que celles qui apparaissent d'ordinaire dans la littérature.

Le travail essentiel consiste ici à contrôler le couplage entre le mode central (qui gouverne le tourbillon) et les modes extrêmes (qui gouvernent la densité et la divergence).

Ce couplage correspond à certains termes au second membre de l'équation d'ondes régissant la densité, termes qui sont de moyenne (spatiale) nulle.

Le cœur de l'analyse consiste à noter qu'il existe dans ce cas des estimations d'énergie bien meilleures que les estimations usuelles, exploitant le caractère «quasi-stationnaire» du tourbillon (§5).

3. La borne supérieure du temps de vie est obtenue en adaptant la méthode de John [7, 8], qui repose bien entendu sur le caractère invariant par rotation des solutions considérées.

4. Le plan de l'article est le suivant:

Dans le premier paragraphe, on énonce les théorèmes et l'on rappelle les résultats techniques nécessaires de [1].

La stratégie de la preuve est expliquée au §3 (après avoir établi quelques lemmes techniques au §2), et sa mise en œuvre commence au §4 par les estimations du tourbillon et de la divergence en fonction de la densité.

Les estimations d'énergie (standard et pour un second membre de moyenne nulle) font l'objet du §5, tandis que les termes de couplage dont on a parlé plus haut sont analysés au §6.

Les §§7 et 8 présentent les estimations des autres termes d'interaction et la fin de la preuve de la borne inférieure du temps de vie et des estimations des restes.

Enfin, la borne supérieure du temps de vie est obtenue au §9, en s'appuyant sur le comportement en temps grand déja établi.

1 Notations et résultats

1.1 Généralités

(a) Nous considérons, pour $(x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$, le système des équations d'Euler isentropiques

(1.1.1)
$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$
$$\partial_t v + (v\nabla) v = -\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{c^2(\rho)}{\rho}\nabla\rho$$

où $v=(v_1, v_2)$ désigne la vitesse et où la pression p est supposée être une fonction connue $p(\rho)$ de la densité ρ, avec $c^2(\rho)=\frac{dp}{d\rho}>0$ (voir [4]). On notera dans la suite $f(\rho)=\frac{c^2(\rho)}{\rho}$.

On choisit comme données initiales

$$\begin{aligned} &\rho(x,0)=\bar\rho+\varepsilon\,\rho_1^0(x), \quad \bar\rho>0 \quad \text{constante},\\ &v(x,0)=\varepsilon\, v_1^0(x), \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

où v_1^0 et ρ_1^0 sont C^∞, nulles pour $|x|\geqq R_0$, indépendantes de $\varepsilon>0$.

Enfin, en notant $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $x^\perp=\begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$, $v_1^0=v_r\,x+v_\theta\,x^\perp$, on supposera:

$$\begin{gathered} \text{les fonctions } \rho_1^0,\, v_r \text{ et } v_\theta \text{ sont } C^\infty\\ \text{et dépendent seulement de } r=|x|. \end{gathered} \tag{1.1.3}$$

Dorénavant, $'$ désignera la dérivation $\frac{\partial}{\partial r}=\sum \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}$, et l'on notera (par abus) pour toute fonction f

$$\|f\|_\alpha=\|f(\cdot,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^2)}, \qquad |f|_s=\|f(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

(b) Pour toute fonction $g=g(r)$, nous noterons

$$I(g)=\frac{1}{r}\int_0^r s\,g(s)\,ds.$$

- Si $d=d(r)$ est C^∞, nulle pour $r\geqq R$ et de moyenne nulle (i.e. $\int d\,dx=0$), $I(d)$ est aussi nulle pour $r\geqq R$, et le champ C^∞ $v^d=I(d)\frac{x}{r}$ vérifie

$$\operatorname{div} v^d=d, \qquad \omega(v^d)=\operatorname{rot}(v^d)=\partial_1 v_2^d-\partial_2 v_1^d=0. \tag{1.1.4}$$

- De même, si $\omega=\omega(r)$ est C^∞, nulle pour $r\geqq R$ et de moyenne nulle, le champ C^∞ $v^\omega=I(\omega)\frac{x^\perp}{r}$ vérifie

$$\operatorname{div} v^\omega=0, \qquad \omega(v^\omega)=\omega. \tag{1.1.5}$$

- Enfin, si v est C^∞, nul pour $r\geqq R$, on a nécessairement $v=v^d+v^\omega$, pour $d=\operatorname{div} v$, $\omega=\operatorname{rot} v$.

1.2 Estimations du temps de vie de la solution

Le premier résultat donne une valeur approchée du temps de vie T_ε de la solution régulière de (1.1.1), (1.1.2).

Théorème 1.2 *Soit*

$$R(\sigma)=\frac{-1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{s\geqq\sigma}\frac{1}{\sqrt{s-\sigma}}\left[\bar\rho\tilde R(s,\operatorname{div} v_1^0)+c(\bar\rho)\frac{d}{ds}\tilde R(s,\rho_1^0)\right]ds,$$

où $\tilde R(s,f)=\int_{x\omega=s} f(x)\,dx$ *est la transformée de Radon d'une fonction* f *(invariante par rotation).*

Supposons ρ_1^0 *et* $d_1^0=\operatorname{div} v_1^0$ *non toutes deux identiquement nulles, et soit* $\sigma_0\leqq R_0$ *un point où* $R'(\sigma_0)$ *est minimum: on a* $R'(\sigma_0)<0$; *posons* $\tau_*=\frac{1}{\mu}\frac{1}{-R'(\sigma_0)}$, *où* $\mu=\frac{2}{\bar\rho\sqrt{\bar c}}(\bar\rho c'(\bar\rho)+c(\bar\rho))>0$. *Alors* $\lim_{\varepsilon\to 0_+}\varepsilon^2 T_\varepsilon=\tau_*^2$.

Remarquons que la quantité μ qui intervient dans le théorème est toujours positive, ce qui équivaut à dire que les valeurs propres extrêmes de (1.1.1) sont vraiment non linéaires au sens de Lax [10] (voir par exemple [4, 11]).

Si $\rho_1^0\equiv 0$, $d_1^0\equiv 0$, la preuve du théorème 1.2 implique $\lim_{\varepsilon\to 0_+}\varepsilon^2 T_\varepsilon=+\infty$; il serait intéressant d'étudier ce cas plus avant.

1.3 Solution approchée et estimations des restes

Il est possible d'affiner le résultat du théorème 1.2 en donnant une solution approchée de (1.1.1), (1.1.2) définie pour $t<\frac{\tau_*^2}{\varepsilon^2}$ et qui, pour $A<\tau_*$, indique l'allure de la vraie solution pour $0\leqq t\leqq\frac{A^2}{\varepsilon^2}$ et $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_A$.

Cette solution approchée (ρ_{app}, v_{app}), ainsi que les restes $\rho-\rho_{\mathrm{app}}$, $v-v_{app}$, seront décrits en termes de $d_{app}=\operatorname{div} v_{app}$, $\omega_{app}=\operatorname{rot} v_{app}$, conformément aux généralités de 1.1(b).

Remarquons qu'en introduisant les inconnues $d=\operatorname{div} v$ et $\omega=\operatorname{rot} v$, le système (1.1.1), (1.1.2) devient

$$\begin{aligned}
&\partial_t\rho+I(d)\rho'+\rho d=0\\
&\partial_t d+I(d)d'+\left(\frac{I(d)}{r}\right)^2+(I'(d))^2-2\frac{I(\omega)I'(\omega)}{r}+f(\rho)\Delta\rho+f'(\rho)|\nabla\rho|^2=0\\
&\partial_t\omega+I(d)\omega'+d\omega=0,
\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}
&\rho(x,0)=\bar\rho+\varepsilon\rho_1^0(x),\\
&d(x,0)=\varepsilon d_1^0(x),\qquad \omega(x,0)=\varepsilon\omega_1^0(x).
\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

(a) *Description de la solution approchée* $(\rho_{app}, d_{app}, \omega_{app})$

L'article [1] est consacré à la construction de fonctions (ρ_a, d_a, ω_a) pour lesquelles les premiers membres des éqs. (1.3.1), notés respectivement R_a, D_a, Ω_a, sont suffisamment petits; ces fonctions satisfont en outre aux conditions initiales

$$\begin{aligned}
&\rho_a(x,0)=\rho(x,0),\quad \partial_t\rho_a(x,0)=\partial_t\rho(x,0),\\
&d_a(x,0)=d(x,0),\quad \omega_a(x,0)=\omega(x,0),\\
&R_a(x,0)=0.
\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

Pour la commodité du lecteur et la complétude de la présente preuve, il est nécessaire de rappeler brièvement les résultats de [1], auxquels on renvoie le lecteur pour tout détail.

On distingue d'emblée deux zones I et II, définies par $t \leqq 2\varepsilon^{-6/5}$ et $t \geqq \varepsilon^{-6/5}$, le raccord entre des fonctions définies en zones I et II se faisant à l'aide d'une troncature $\theta = \theta(t\varepsilon^{6/5})(\theta \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \theta(s)=1$ pour $s \leqq 1$, $\theta(s)=0$ pour $s \geqq 2)$.

Par ailleurs, l'absence de lacune en dimension deux pour l'équation des ondes conduit à introduire une troncature «conique» $\chi = \chi\left(\dfrac{r}{\bar{c}(1+t)}\right)(\chi \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \chi(s)=0$ pours $s \leqq \frac{1}{2}$, $\chi(s)=1$ pour $s \geqq \frac{2}{3})$.

(i) En zone I, les fonctions $\rho_a = \rho_a^I$ et $d_a = d_a^I$ sont de la forme

$$\rho_a^I = \bar{\rho} + \varepsilon \rho_1^I + \varepsilon^2 \rho_2^I + \varepsilon^3 \rho_3^I, \qquad d_a^I = \varepsilon d_1^I + \varepsilon^2 d_2^I + \varepsilon^3 d_3^I$$

avec (en omettant les «I» pour alléger)

$$d_1 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_t \rho_1, \qquad d_2 = -\frac{1}{\bar{\rho}} [\partial_t \rho_2 + \rho_1 d_1 + I(d_1)\rho_1'],$$

$$d_3 = \frac{-1}{\bar{\rho}} [\partial_t \rho_3 + \rho_1 d_2 + I(d_2)\rho_1' + \rho_2 d_1 + I(d_1)\rho_2'].$$

Les composantes ρ_i sont définies comme suit:

- $$\Box \rho_1 = 0, \qquad \rho_1|_{t=0} = \rho_1^0, \qquad \partial_t \rho_1|_{t=0} = -\bar{\rho} d_1^0,$$

où (par abus) $\Box = \partial_t^2 - \bar{c}^2 \Delta_x$.

- $$\rho_2(x,t) = \psi(x) + \bar{\rho}_2(x,t),$$

où

$$\psi(x) = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{c}^2} \int_r^{R_0} [I(\omega_1^0)]^2 \frac{ds}{s} \tag{1.3.4}$$

et

$$\Box \bar{\rho}_2 = \bar{\rho}\left[\left(\frac{I(d_1)}{r}\right)^2 + (I'(d_1))^2\right] + (f(\bar{\rho}) + \bar{\rho} f'(\bar{\rho}))\rho_1 \Delta \rho_1$$
$$+ \bar{\rho} f'(\bar{\rho})|\nabla \rho_1|^2 - \partial_t I(d_1)\rho_1' - 2I(d_1)\partial_t \rho_1' - (\partial_t \rho_1) d_1,$$

avec

$$\bar{\rho}_2|_{t=0} = -\psi, \qquad \partial_t \bar{\rho}_2|_{t=0} = -\rho_1^0 d_1^0 - v_1^0 \nabla \rho_1^0.$$

- $$\rho_3(x,t) = [1-\theta(t)]\,\mu^2 \frac{t}{2r} \partial_r(\chi r^{1/2}(R^2 R')(r - \bar{c}t)),$$

où μ et R sont définis au théorème 1.2.

Pour t grand, sur le support de χ, on peut montrer que

$$\rho_1 \sim \frac{R(r - \bar{c}t)}{r^{1/2}} \tag{1.3.5}$$

et

$$\rho_2 - \psi + \mu \frac{\sqrt{t}}{2r} \partial_r (\chi r^{1/2} R^2 (r - \bar{c}t)) \sim \frac{L(r - \bar{c}t)}{r^{1/2}}, \tag{1.3.6}$$

pour une certaine fonction L de classe C^∞ (supportée pour $\sigma \leqq R_0$), vérifiant $|L(\sigma)| \leqq C(1+|\sigma|)^{1/2}$, $L' \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) En zone II, on introduit la variable de temps lent $\tau = \varepsilon \sqrt{t}$, et on module les profils R et L qui apparaissent en (1.3.5), (1.3.6) selon les équations

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} + \mu R \frac{\partial R}{\partial \sigma} = 0 \qquad R(\sigma, 0) = R(\sigma) \tag{1.3.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial}{\partial \sigma}(RL) = 0 \qquad L(\sigma, 0) = L(\sigma). \tag{1.3.8}$$

Seule (1.3.7) est non linéaire, et $\tau_* < +\infty$ est le temps de vie de sa solution classique.

Posons alors

$$S(\sigma, \tau) = -\mu \tau \int_0^1 \frac{R^2}{2}(\sigma, s\tau)\, ds, \tag{1.3.9}$$

$$K(\sigma, \tau) = -\mu \tau \int_0^1 (RL)(\sigma, s\tau)\, ds. \tag{1.3.10}$$

Les fonctions $\rho_a = \rho_a^{II}$ et $d_a = d_a^{II}$ sont de la forme $\rho_a^{II} = \bar{\rho} + \varepsilon \rho_1^{II} + \varepsilon^2 \rho_2^{II}$, $d_a^{II} = \varepsilon d_1^{II} + \varepsilon^2 d_2^{II}$ avec (en omettant les «II» pour alléger)

$$d_1 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_t \rho_1, \qquad d_2 = -\frac{1}{\bar{\rho}} [\partial_t \rho_2 + \rho_1 d_1 + I(d_1) \rho_1']$$

(comme en zone I).

Les composantes ρ_i^{II} sont définies comme suit:

- $$\rho_1^{II} = \rho_1^I + \frac{1}{r} \partial_r (\chi r^{1/2} S(r - \bar{c}t, \tau))$$
- $$\rho_2^{II} = \rho_2^I + \mu \frac{\sqrt{t}}{2r} \partial_r (\chi r^{1/2} R^2 (r - \bar{c}t)) + \frac{1}{r} \partial_r (\chi r^{1/2} K(r - \bar{c}t, \tau)).$$

(iii) Au total, on définit

$$\rho_a = \theta \rho_a^I + (1-\theta) \rho_a^{II}, \qquad d_a = \theta d_a^I + (1-\theta) d_a^{II} \quad \text{et}$$
$$\omega_a = \varepsilon \omega_1^0 \text{ partout.}$$

Dans le présent travail, pour des raisons qui seront expliquées plus tard, nous choisissons

$$\text{(1.3.11)} \qquad \rho_{app} \equiv \rho_a, \qquad d_{app} \equiv d_a,$$
$$\omega_{app} = \omega_a - \varepsilon^2 \int_0^t [\omega_1^0 \, d_1^l + I(d_1^l)\, \omega_1^{0'}]\, ds.$$

(b) *Rappel de quelques propriétés de* (ρ_a, d_a, ω_a)

Il est utile de souligner ici quelques propriétés de (ρ_a, d_a, ω_a) qui seront d'un usage constant dans la suite (voir [1]):

- Les fonctions (ρ_a, d_a, ω_a) respectent les lois de conservations de (1.1.1), c'est-à-dire

$$\text{(1.3.12)} \qquad \int (\rho_a - \bar{\rho})(x,t)\, dx = \varepsilon \int \rho_1^0(x)\, dx,$$
$$\int d_a(x,t)\, dx = 0, \qquad \int \omega_a(x,t)\, dx = 0.$$

- Les fonctions (ρ_a, d_a) satisfont, pour tout α et $t \leqq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$ aux majorations

$$\text{(1.3.13)} \qquad \|\partial_{x,t}^\alpha (\rho_a - \bar{\rho})\|_0 \leqq C_{A,\alpha} \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}},$$

$$\text{(1.3.14)} \qquad \|\partial_{x,t}^\alpha \, d_a\|_0 \leqq C_{A,\alpha} \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}},$$

$$\text{(1.3.15)} \qquad \|\partial_{x,t}^\alpha \, I(d_a)\|_0 \leqq C_{A,\alpha} \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}.$$

(c) *Rappel du théorème principal de* [1]

Dans l'article [1], on définit, outre R_a, D_a, Ω_a, la quantité

$$\text{(1.3.16)} \qquad J_a = \rho_a D_a - (\partial_t + I(d_a)\, \partial_r)\, R_a,$$

et l'on pose

$$\text{(1.3.17)} \qquad J_a = \varepsilon^4 \Big[(\bar{\rho} f'(\bar{\rho}) + f(\bar{\rho}))\, \psi \Delta \psi + \bar{\rho} f'(\bar{\rho}) |\nabla \psi|^2$$
$$- 2 \frac{\psi}{r} I(\omega_1^0)\, I'(\omega_1^0) \Big] + \tilde{J}_a \equiv \varepsilon^4 [[\psi]] + \tilde{J}_a.$$

Le théorème 1.3 de [1] indique la précision de la solution (ρ_a, d_a, ω_a):

Théorème. *Il existe* $\nu>0$ et, *pour tout* $A<\tau_*$, *il existe* $\varepsilon_A>0$ *et des constantes* $C_{A,\alpha}$ *telles que, si* $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_A$ *et* $t\leqq\frac{A^2}{\varepsilon^2}$, *on a pour tout* α *les estimations:*

(a)

(1.3.18)
$$\|\partial^\alpha_{x,t} R_a(\cdot,t)\|_0\leqq C_{A,\alpha}\frac{\varepsilon^4}{1+\varepsilon^{6/5}t},$$
$$|\partial^\alpha_{x,t} R_a(\cdot,t)|_0\leqq C_{A,\alpha}\frac{\varepsilon^4(1+t)^{1/2}}{1+\varepsilon^{6/5}t}$$

(b)

(1.3.19)
$$\|\partial^\alpha_{x,t}\Omega_a(\cdot,t)\|_0+|\partial^\alpha_{x,t}\Omega_a(\cdot,t)|_0\leqq C_{A,\alpha}\varepsilon^2\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{\varepsilon}{1+t}\right).$$

(c) *En zone* I:
$$|\partial^\alpha_{x,t}\tilde{J}_a(\cdot,t)|_0\leqq C_{A,\alpha}\left[\frac{\varepsilon^3}{(1+t)^{1/2}}+\varepsilon^4(1+t)^{1/2}\right],$$

en zone de transition:

(1.3.20)
$$|\partial^\alpha_{x,t}\tilde{J}_a(\cdot,t)|_0\leqq C_{A,\alpha}\frac{\varepsilon}{t^2}(\log t)^{1/2},$$

en zone II:
$$|\partial^\alpha_{x,t}\tilde{J}_a(\cdot,t)|_0\leqq C_{A,\alpha}\left[\frac{\varepsilon(\log t)^{1/2}}{t^2}+\frac{\varepsilon^3}{t^{1/2+\nu}}\right].$$

Notons en particulier que $\int_0^t|\tilde{J}_a(\cdot,t)|_0\,ds\leqq C_A\,\varepsilon^{2+\nu'}$ pour un $\nu'>0$, $t\leqq\frac{A^2}{\varepsilon^2}$.

(d) *Estimations des restes*

Le deuxième résultat de ce travail donne une estimation des restes $\rho-\rho_{app}$, $d-d_{app}$, $\omega-\omega_{app}$.

Théorème 1.3 *Il existe* $\nu>0$ *et, pour tout* $A<\tau_*$, *il existe des nombres* $\varepsilon_A>0$, $C_A\geqq 0$, $R_A\geqq 0$ *tels que la solution* (ρ,v) *de* (1.1.1), (1.1.2) *est classique pour* $t\leqq\frac{A^2}{\varepsilon^2}$ *si* $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_A$ *et*

(1.3.21)
$$\|\rho-\rho_{app}\|_0\leqq\varepsilon^{2+\nu},\qquad|\nabla_{x,t}(\rho-\rho_{app})|_2\leqq\varepsilon^{2+\nu}$$

(1.3.22)
$$|d-d_{app}|_2\leqq\varepsilon^{2+\nu},\qquad|\omega-\omega_{app}|_2\leqq C_A\,\varepsilon^3 t$$

(1.3.23)
$$(\omega-\omega_{app})(x,t)=0\quad\text{pour}\quad|x|\geqq R_A.$$

Dans les paragraphes qui suivent, nous prouvons le théorème 1.3: la méthode de la preuve sera expliquée au §3 et mise en œuvre aux §§4–8.

L'estimation supplémentaire $\overline{\lim}_{\varepsilon \to 0_+} \varepsilon^2 T_\varepsilon \leqq \tau_*^2$ du théorème 1.2 est obtenue au §9.

Nous avons rassemblé au §2 quelques lemmes techniques simples, et utiles par la suite.

2 Moyennes et supports: quelques lemmes utiles

2.1 Propriétés de l'intégrale $I(f)$

On a défini en 1.1(b) l'intégrale $I(f)(r) = \frac{1}{r} \int_0^r s f(s)\, ds$, pour une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ invariante par rotation.

Le lemme suivant en précise quelques propriétés.

Lemme 2.1 *L'opérateur I possède les propriétés suivantes:*

(a) (i) $\left(\int_{|x| \leqq C} |I(f)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leqq \frac{C}{2} \left(\int_{|x| \leqq C} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

(i)′ $\left| \frac{I(f)}{r} \right|_0 \leqq |f|_0$

(ii) $\sup_{|x| \leqq C} |I(f)(x)| \leqq \frac{C}{2} \sup_{|x| \leqq C} |f(x)|$

(ii)′ $\left\| \frac{I(f)}{r} \right\|_0 \leqq \frac{1}{2} \|f\|_0$

(iii) $\|I(f)\|_0 \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |f|_0$.

(b) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\partial_r^k \frac{I(f)}{r} = \frac{1}{r^{k+1}} I(r^k \partial_r^k f)$, *et*

$$\left| \frac{1}{r^{k+1}} I(r^k \partial_r^k f) \right|_0 \leqq C |\partial_r^k f|_0, \qquad \left\| \frac{1}{r^{k+1}} I(r^k \partial_r^k f) \right\|_0 \leqq C \|\partial_r^k f\|_0.$$

(c) *Pour tout j, on a*

(i)
$$\left| \nabla \frac{x_j I(f)}{r} \right|_0 \leqq C |f|_0, \qquad \left| \nabla^2 \frac{x_j I(f)}{r} \right|_0 \leqq C |\nabla f|_0,$$
$$\left| \nabla^3 \frac{x_j I(f)}{r} \right|_0 \leqq C |\nabla^2 f|_0.$$

(ii)
$$\left\| \nabla \frac{x_j I(f)}{r} \right\|_0 \leqq C \|f\|_0, \qquad \left\| \nabla^2 \frac{x_j I(f)}{r} \right\|_0 \leqq C \|\nabla f\|_0,$$
$$\left\| \nabla^3 \frac{x_j I(f)}{r} \right\|_0 \leqq C \|\nabla^2 f\|_0.$$

Preuve. (a) Par Cauchy-Schwarz, on trouve

$$(I(f)(r))^2=\frac{1}{r^2}\left(\int_0^r s|f(s)|^2\,ds\right)\left(\int_0^r s\,ds\right)\leqq\frac{1}{2}\int_0^r s|f(s)|^2\,ds,$$

d'où (a. i, iii). Pour (i)′ on écrit

$$(I(f)(r))^2\leqq\frac{1}{r}\int_0^r s^2|f(s)|^2\,ds,$$

d'où

$$\int|I(f)(r)|^2\frac{dr}{r}\leqq\int s^2|f(s)|^2\,ds\int_s^{+\infty}\frac{dr}{r^2}=\int s|f(s)|^2\,ds.$$

Enfin, (ii) et (ii)′ sont évidents.

Plus généralement,

$$|I(r^k f)|^2\leqq\left(\int_0^r s^2|f(s)|^2\,ds\right)\frac{r^{2k-1}}{(2k+1)},$$

et

$$\left|\frac{1}{r^{k+1}}I(r^k f)\right|_0^2=2\pi\int\frac{1}{r^{2k+2}}|I(r^k f)|^2\,r\,dr\leqq C\int\frac{dr}{r^2}\int_0^r s^2|f(s)|^2\,ds$$
$$=C\int s|f(s)|^2\,ds;$$

d'où

$$\left|\frac{1}{r^{k+1}}I(r^k f)\right|_0\leqq C|f|_0,\quad\text{et}\quad\left\|\frac{1}{r^{k+1}}I(r^k f)\right\|_0\leqq C\|f\|_0.$$

(b) Comme $\partial_r I(g)=g-\frac{I(g)}{r}$, $\partial_r^{k+1}\frac{I(f)}{r}=\frac{-(k+2)}{r^{k+2}}I(r^k\partial_r^k f)+\frac{1}{r}\partial_r^k f$; or $I(r^{k+1}g')=r^{k+1}g(r)-(k+2)\,I(r^k g)$, d'où b. par récurrence sur k.

(c) Posons $a_j=\frac{x_j}{r}I(f)(r)$. On a

$$\partial_i a_j=\delta_{ij}\frac{I}{r}+\frac{x_j x_i}{r}\left(\frac{I}{r}\right)',$$

d'où les formules pour ∇a_j d'après a (i)′ et (ii)′.

Ensuite $\partial_{ik}^2 a_j=\delta_{ij}\frac{x_k}{r}\left(\frac{I}{r}\right)'+\partial_k\left(\frac{x_i x_j}{r}\right)\left(\frac{I}{r}\right)'+\frac{x_i x_j x_k}{r^2}\left(\frac{I}{r}\right)''$: comme

$$\left(\frac{I}{r}\right)'=\frac{1}{r^2}I(rf'),\left(\frac{I}{r}\right)''=-\frac{2}{r^3}I(rf')+\frac{1}{r^2}\left(rf'-\frac{I(rf')}{r}\right),$$

on a

$$\partial_{ik}^2 a_j = \frac{I(rf')}{r^2}\left[\delta_{ij}\frac{x_k}{r} + \partial_k\left(\frac{x_i x_j}{r}\right) - 3\frac{x_i x_j x_k}{r^3}\right] + \frac{x_i x_j x_k}{r^3} f',$$

et les formules pour $\nabla^2 a_j$ résultent de a. Enfin

$$\partial_{ikl}^3 a_j = \left[\quad\right]\frac{1}{r^3} I(r^2 f'')\frac{x_l}{r} + r\,\partial_l\left[\quad\right]\frac{I\left(r^2\frac{f'}{r}\right)}{r^3}$$
$$+ r\,\partial_l\left(\frac{x_i x_j x_k}{r^3}\right)\frac{f'}{r} + \frac{x_i x_j x_k}{r^3} f''\frac{x_l}{r},$$

d'où

$$|\nabla^3 a_j|_0 \leqq C\left(|f''|_0 + \left|\frac{f'}{r}\right|_0\right) \quad \text{et} \quad \|\nabla^3 a_j\|_0 \leqq C\left(\|f''\|_0 + \left\|\frac{f'}{r}\right\|_0\right).$$

Les formules résultent alors du lemme suivant.

(d) **Lemme.** *Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ est invariante par rotation,*

$$\frac{1}{C}\left(|f''|_0 + \left|\frac{f'}{r}\right|_0\right) \leqq |\nabla^2 f|_0 \leqq C\left(|f''|_0 + \left|\frac{f'}{r}\right|_0\right).$$

En effet,

$$\partial_{ik}^2 f = \frac{x_i x_k}{r^2} f'' + \frac{\delta_{ik}}{r} f' - \frac{x_i x_k}{r^3} f',$$

d'où l'inégalité de droite; par ailleurs,

$$f'' = \sum \frac{x_i x_k}{r^2}\partial_{ik}^2 f \quad \text{et} \quad \Delta f = f'' + \frac{f'}{r},$$

d'où l'inégalité de gauche.

Remarquons en outre que si $\int f(x)\,dx = 0$ et $f(x) = 0$ pour $|x| \geqq R$, $I(f)(x) = 0$ pour $|x| \geqq R$.

2.2 Un lemme de localisation

Nous aurons besoin de la variante suivante du lemme de Poincaré.

Lemme 2.2 *Soit $u(x) = u(r)$ une fonction de classe C^1 nulle pour $|x| \geqq R$, et $S(\sigma)$ une fonction vérifiant $|S(\sigma)| \leqq \dfrac{1}{(1+|\sigma|)^m}$ pour $\sigma \geqq 0$ ($m \in \mathbb{R}$).*

Posons $v(r)=u(r)\,S(R-r)$. *Alors* $|v|_0 \leqq C_m\, R^{(1-m)_+}\,|\nabla u|_0$ (cte$(\log R)^{1/2}|\nabla u|_0$ *si* $m=1$).

Preuve. On a

$$|v|_0^2 \leqq \text{cte} \int_0^R \frac{|u(r)|^2\, r\,dr}{(1+R-r)^{2m}} \leqq \text{cte} \int_0^R \frac{r\,dr \log\frac{R}{r}}{(1+R-r)^{2m}} \int_r^R |u'(s)|^2\, s\,ds$$

$$\leqq \text{cte}\,|\nabla u|_0^2 \int_0^R \frac{r\,dr}{(1+R-r)^{2m}} \log\frac{R}{r},$$

car $u(r)=-\int_r^R u'(s)\,ds$ et donc

$$|u(r)|^2 \leqq \left(\int_r^R |u'(s)|^2\, s\,ds\right)\left(\int_r^R \frac{ds}{s}\right).$$

Coupons l'intégrale en deux:

$$\int_0^{R/2} \leqq \frac{\text{cte}}{R^{2m}} \int_0^{R/2} r\log\frac{R}{r}\,dr \leqq \text{cte}\, R^{2(1-m)},$$

et

$$\int_{R/2}^R = \int_0^{R/2} \frac{(R-s)\log\frac{R}{R-s}\,ds}{(1+s)^{2m}} \leqq \int_0^{R/2} \frac{s\,ds}{(1+s)^{2m}},$$

d'où le lemme. □

2.3 Lemme de la divergence

Avec les notations de 1.1.b., remarquons que $\operatorname{div}(\rho v^d)=\rho d + v^d \nabla\rho = \rho d + I(d)\,\rho'$. Cette expression joue un rôle particulier dans la suite, qui justifie le lemme suivant.

Lemme 2.3 (i) *Si* R *et* ρ *sont des fonctions* C^∞ *invariantes par rotation,* $\rho \neq 0$, *l'équation* $pd+I(d)\,\rho'=R$ *possède pour unique solution*

$$d=\frac{R}{\rho}-\frac{\rho'}{\rho^2}\,I(R), \quad \text{avec} \quad I(d)=\frac{1}{\rho}\,I(R).$$

Si de plus $R(r)=0$ *pour* $r \geqq C$ *et* $\int R(x)\,dx=0$, *alors* $d(r)=0$ *pour* $r\geqq C$ *et* $\int d(x)\,dx=0$.

(ii) *Sous les hypothèses de* (i), *l'équation* $\rho d - I(d)\rho' = R$ *possède pour unique solution*

$$d = \frac{R}{\rho} + \rho' I\left(\frac{R}{\rho^2}\right), \quad \text{avec} \quad I(d) = \rho I\left(\frac{R}{\rho^2}\right).$$

3 Solution approchée et solution exacte

Dans toute la suite (sauf au §9), nous utilisons la forme (1.3.1), (1.3.2) du système.

3.1 Perturbation d'une solution approchée

Supposons construites des fonctions (ρ_a, d_a, ω_a) (C^∞ et invariantes par rotation), supportées dans $r \leqq \bar{c}t + R_0$ vérifiant (1.3.3) et (1.3.12), et posons $\rho = \rho_a + \tilde{\rho}$, $d = d_a + \tilde{d}$, $\omega = \omega_a + \tilde{\omega}$.

Lemme 3.1 *Les fonctions* $(\tilde{\rho}, \tilde{d}, \tilde{\omega})$ *vérifient le système*

$$\text{(3.1.1)} \qquad D_t \tilde{\rho} + \rho \tilde{d} = -R_a - d_a \tilde{\rho} - I(\tilde{d})\rho'_a$$

$$\begin{aligned}\text{(3.1.2)} \qquad D_t \tilde{d} + f(\rho)\Delta\tilde{\rho} = {} & -D_a - I(\tilde{d})d'_a \\ & -\left[\frac{I(\tilde{d})}{r^2}(I(\tilde{d}) + 2I(d_a)) + I'(\tilde{d})(I'(\tilde{d}) + 2I'(d_a))\right] \\ & + \frac{2}{r}[I(\omega)I'(\tilde{\omega}) + I(\tilde{\omega})I'(\omega_a)] - [f(\rho_a + \tilde{\rho}) - f(\rho_a)]\Delta\rho_a \\ & - [f'(\rho_a + \tilde{\rho}) - f'(\rho_a)]|\nabla\rho_a + \nabla\tilde{\rho}|^2 \\ & - f'(\rho_a)[|\nabla\tilde{\rho}|^2 + 2\nabla\rho_a\nabla\tilde{\rho}].\end{aligned}$$

$$\text{(3.1.3)} \qquad D_t \tilde{\omega} + \omega\tilde{d} = -\Omega_a - d_a\tilde{\omega} - I(\tilde{d})\omega'_a,$$

où $D_t f = (\partial_t + v\nabla) f = \partial_t f + v^d \nabla f = \partial_t f + I(d) f'$ *pour une fonction* $f = f(r, t)$.

3.2 Les ajustements $\tilde{d}_a$, $\tilde{\omega}_a$

(a) Dans l'éq. (3.1.1), si $\tilde{\rho} = 0$, on trouve $\rho_a \tilde{d} + I(\tilde{d})\rho'_a = -R_a$. Notons que $\int R_a\, dx = 0$ à cause de (1.3.12), et définissons, grâce au lemme 2.3, la fonction $\tilde{d}_a$ par

$$\text{(3.2.1)} \qquad \tilde{d}_a = -\frac{R_a}{\rho_a} + \frac{\rho'_a}{\rho_a^2} I(R_a), \quad \text{avec} \quad I(\tilde{d}_a) = \frac{-1}{\rho_a} I(R_a).$$

La fonction $\tilde{d}_a$ vérifie

$$\text{(3.2.2)} \qquad \int \tilde{d}_a(x, t)\, dx = 0, \qquad \tilde{d}_a(x, t) = 0$$
$$\text{pour} \quad r \geqq \bar{c}t + R_0, \qquad \tilde{d}_a(x, 0) = 0.$$

Posons $\tilde{d}=\tilde{d}_a+\dot{d}$: l'éq. (3.1.1) s'écrit maintenant

(3.2.3) $$\rho\dot{d}+I(\dot{d})\rho'=\dot{R}, \quad \text{où} \quad -\dot{R}=\partial_t\tilde{\rho}+\tilde{\rho}(d_a+\tilde{d}_a)+I(d_a+\tilde{d}_a)\tilde{\rho}'.$$

La fonction $\dot{d}$ vérifie

(3.2.2)' $$\int\dot{d}(x,t)\,dx=0, \quad \dot{d}(x,t)=0 \quad \text{pour} \quad r\geqq\bar{c}t+R_0, \quad \dot{d}(x,0)=0.$$

(b) L'éq. (3.1.3) devient

$$D_t\tilde{\omega}+I(\dot{d})\omega_a'+\tilde{\omega}(d_a+\tilde{d}_a)+\omega\dot{d}=-\Omega_a-(\omega_a\tilde{d}_a+I(\tilde{d}_a)\omega_a'),$$

soit, si $\dot{d}=0$,

$$D_t^a\tilde{\omega}+\tilde{\omega}(d_a+\tilde{d}_a)=-\Omega_a-(\omega_a\tilde{d}_a+I(\tilde{d}_a)\omega_a'),$$

où $D_t^a=\partial_t+I(d_a+\tilde{d}_a)\partial_r$.

Définissons donc la fonction $\tilde{\omega}_a$ par

(3.2.4) $$D_t^a\tilde{\omega}_a+\tilde{\omega}_a(d_a+\tilde{d}_a)=-\Omega_a-(\omega_a\tilde{d}_a+I(\tilde{d}_a)\omega_a')$$
$$\tilde{\omega}_a(x,0)=0.$$

La fonction $\tilde{\omega}_a$ vérifie

(3.2.5) $$\int\tilde{\omega}_a(x,t)\,dx=0, \quad \tilde{\omega}_a(x,t)=0 \quad \text{pour} \quad r\geqq\bar{c}t+R_0,$$

car $\int\Omega_a\,dx=0$ à cause de (1.3.12), et une expression de la forme $fg+I(g)f'$ est toujours de moyenne nulle si f ou $I(g)$ sont à supports compacts.

Posons $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_a+\dot{\omega}$: l'eq. (3.1.3) s'écrit maintenant

(3.2.6) $$D_t\dot{\omega}+d\dot{\omega}=-(\dot{d}(\omega_a+\tilde{\omega}_a)+I(\dot{d})(\omega_a+\tilde{\omega}_a)')$$
$$\dot{\omega}(x,0)=0,$$

et la fonction $\dot{\omega}$ vérifie

(3.2.5)' $$\int\dot{\omega}(x,t)\,dx=0, \quad \dot{\omega}(x,t)=0 \quad \text{pour} \quad r\geqq\bar{c}t+R_0.$$

Dans toute la suite, on notera $\dot{\rho}\equiv\tilde{\rho}$, et on considèrera les éqs. (3.2.3) et (3.2.6) comme déterminant $\dot{d}$ et $\dot{\omega}$ en fonction de $\dot{\rho}$.

Il reste à établir l'équation sur $\dot{\rho}$.

3.3 L'équation de base sur $\dot{\rho}$

Cette équation est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.3 *Posons $L=\partial_t^2+2v^d\nabla\partial_t-\sum_{i,j}\tilde{\gamma}_{ij}\partial_{i,j}^2$, avec $\tilde{\gamma}_{ij}=c^2(\rho)\,\delta_{ij}-\frac{x_i x_j}{r^2}(I(d))^2$. Alors la fonction $\dot{\rho}$ vérifie*

(3.3.1) $$L\dot{\rho}=F+\rho' I\left(\frac{F}{\rho}\right), \quad \dot{\rho}(x,0)=0, \quad \partial_t\dot{\rho}(x,0)=0,$$

où $F = F_a + \sum_{i=1}^{6} F_i$ *est définie comme suit:*

(a) $$F_a = \rho_a G_a - 2\frac{\rho_a}{r} H_a + I_a + J_a, \text{ avec}$$

$$G_a = \frac{2}{r^2} I^2(\tilde{d}_a) + \frac{4}{r^2} I(d_a) I(\tilde{d}_a) + \tilde{d}_a^2 + 2\left(d_a - \frac{I(d_a)}{r}\right)\tilde{d}_a$$
$$-\frac{2}{r}(d_a + \tilde{d}_a) I(\tilde{d}_a),$$

$$H_a = (\omega_a + \tilde{\omega}_a) I(\tilde{\omega}_a) + \tilde{\omega}_a I(\omega_a) - \frac{2}{r} I(\omega_a) I(\tilde{\omega}_a) - \frac{1}{r} 1^2(\tilde{\omega}_a),$$

$$I_a = -\tilde{d}_a D_t^a \rho_a - D_t^a(I(\tilde{d}_a)\rho_a') + \rho_a I(\tilde{d}_a) d_a' - I(\tilde{d}_a) R_a',$$

$$J_a = \rho_a D_a - (\partial_t + I(d_a)\partial_r) R_a \qquad (\textit{défini en } (1.3.16)).$$

(b) $$F_1 = -2\frac{\bar{\rho}}{r}\partial_r k, \quad \text{où} \quad k = I(\dot{\omega}) I(\omega_a + \tilde{\omega}_a) + \tfrac{1}{2}(I(\dot{\omega}))^2$$

$$F_2 = -\frac{2}{r}\partial_r[\dot{\rho}(k + k_a)], \quad \text{où} \quad k_a = I(\tilde{\omega}_a) I(\omega_a) + \tfrac{1}{2}(I(\tilde{\omega}_a))^2.$$

(c) $$F_3 = -2\frac{\rho'}{\rho} I(d)\,\partial_t \dot{\rho} + 2\frac{\rho'}{\rho} I(d\,\partial_t \dot{\rho}) + \frac{\rho'}{\rho} I\left(\sum \tilde{\gamma}_{ij}\,\partial_{ij}^2 \dot{\rho}\right) - \frac{\rho'\,\partial_t \rho}{\rho^2} I(\partial_t \dot{\rho})$$
$$+\frac{\rho'}{\rho} I(d_a + \tilde{d}_a)\,\partial_t \dot{\rho} - I(d)\, I'(d)\,\dot{\rho}' - I(\partial_t(d_a + \tilde{d}_a))\,\dot{\rho}'$$
$$-(d_a + \tilde{d}_a) D_t \dot{\rho} + \rho f'(\rho_a)(\nabla \dot{\rho} + 2\nabla \rho_a)\nabla \dot{\rho} + \frac{2}{r}(k + k_a)\,\dot{\rho}'.$$

(d) $$F_4 = -(\partial_t \rho_a') I(\dot{d}) - I(d) I'(\dot{d}) \rho_a' - (D_t \rho)\dot{d} - \tilde{d}_a I(\dot{d}) \rho_a' - I(\dot{d}) R_a'$$
$$- I(d) I(\dot{d}) \rho_a'' + \rho_a I(\dot{d}) d_a' + \rho [\![\dot{d}]\!],$$

où

$$[\![\dot{d}]\!] = \frac{2}{r^2}(I(\dot{d}))^2 + \frac{4}{r^2} I(d_a + \tilde{d}_a) I(\dot{d})$$
$$+ \dot{d}^2 + 2\left(d_a + \tilde{d}_a - \frac{I(d_a + \tilde{d}_a))}{r}\right)\dot{d} - \frac{2}{r} d I(\dot{d}).$$

(e) $$F_5 = -\frac{\rho'\,\partial_t \rho}{\rho^2} I(d_a + \tilde{d}_a)\,\dot{\rho} + \frac{\rho'}{\rho} I(\partial_t(d_a + \tilde{d}_a))\,\dot{\rho} + \dot{\rho}(D_a + G_a - D_t^a d_a)$$
$$+ I(\tilde{d}_a)\rho_a' \dot{\rho} + \rho[f(\rho_a + \dot{\rho}) - f(\rho_a)]\,\Delta \rho_a$$
$$+ \rho[f'(\rho_a + \dot{\rho}) - f'(\rho_a)]\,|\nabla \rho|^2.$$

(f) $$F_6 = -2\frac{\rho_a - \bar{\rho}}{r}\partial_r k.$$

Preuve. (a) En appliquant l'opérateur D_t à (3.1.1) et en utilisant (3.1.2) on trouve

$$D_t^2\,\dot\rho - c^2(\rho)\,\Delta\,\dot\rho = -D_t^a(I(\dot d)\,\rho_a') + f_1,$$

où

$$\begin{aligned} f_1 = F_a - 2\frac{\rho}{r}\,\partial_r k - 2\frac{\dot\rho}{r}\,\partial_r k_a - (D_t\,\rho)\,\dot d - (d_a + \tilde d_a)\,D_t\,\dot\rho \\ - \tilde d_a\,I(\dot d)\,\rho_a' - I(\dot d)\,R_a' - (D_t\,d_a)\,\dot\rho - I(\dot d)(I(\dot d)\,\rho_a')' \\ + \dot\rho(D_a + G_a) + \rho I(\dot d)\,d_a' + \dot\rho I(\tilde d_a)\,\rho_a' + \rho[\![\dot d]\!] \\ + \rho[f(\rho_a + \dot\rho) - f(\rho_a)]\,\Delta\,\rho_a + \rho[f'(\rho_a + \dot\rho) - f'(\rho_a)]\,|\nabla\,\rho|^2 \\ + \rho f'(\rho_a)(|\nabla\,\dot\rho|^2 + 2\nabla\,\rho_a\,\nabla\,\dot\rho). \end{aligned}$$

(b) Or $D_t^2\,\dot\rho - c^2(\rho)\,\Delta\,\dot\rho = L\dot\rho + D_t(I(d))\,\dot\rho'$, donc

$$\begin{aligned} L\dot\rho = f_1 - I(\partial_t\,\dot d)\,\rho' - I(d)\,I'(d)\,\dot\rho' - I(\partial_t(d_a + \tilde d_a))\,\dot\rho' - I(\dot d)(D_t^a\,\rho_a') \\ - I(d_a + \tilde d_a)\,I'(\dot d)\,\rho_a' \equiv -I(\partial_t\,\dot d)\,\rho' + f_2. \end{aligned}$$

Le problème est que $\partial_t\dot d$ fait intervenir $\partial_t^2\,\dot\rho$, lui-même contrôlé par $L\dot\rho$. On écrit donc, grâce à (3.2.3),

$$I(\dot d) = \frac{1}{\rho}\,I(\dot R) = \frac{-1}{\rho}(I(\partial_t\,\dot\rho) + I(d_a + \tilde d_a)\,\dot\rho) \quad \text{et}$$

$$I(\partial_t\,\dot d) = -\frac{1}{\rho}[I(\partial_t^2\,\dot\rho - L\dot\rho) + I(L\dot\rho)] + \frac{\partial_t\,\rho}{\rho^2}\,I(\partial_t\,\dot\rho) - \partial_t\,\frac{1}{\rho}(I(d_a + \tilde d_a)\,\dot\rho).$$

Il vient finalement

$$\begin{aligned} L\dot\rho - \frac{\rho'}{\rho}\,I(L\dot\rho) = f_2 - \frac{\rho'\,\partial_t\,\rho}{\rho^2}(I(\partial_t\,\dot\rho) + I(d_a + \tilde d_a)\,\dot\rho) + \frac{\rho'}{\rho}\,\partial_t(I(d_a + \tilde d_a)\,\dot\rho) \\ - 2\frac{\rho'}{\rho}\,I(d)\,\partial_t\,\dot\rho + 2\frac{\rho'}{\rho}\,I(d\,\partial_t\,\dot\rho) + \frac{\rho'}{\rho}\,I(\textstyle\sum\tilde\gamma_{ij}\,\partial_{ij}^2\,\dot\rho) = F. \end{aligned}$$

(c) Grâce au lemme 2.3, on obtient $L\dot\rho = F + \rho'\,I\left(\frac{F}{\rho}\right)$, et la répartition des termes de F comme l'indique le lemme se vérifie sans peine. □

La stratégie de la preuve est maintenant la suivante: les termes $F_1, \ldots, F_6$ de F (au second membre de (3.3.1)) seront évalués en fonction de $\dot\rho$, tandis que F_a ne dépend que de (ρ_a, d_a, ω_a). Une méthode d'inégalités d'énergie appliquée à l'opérateur L permettra alors d'estimer $\dot\rho$.

Nous allons préciser au §4 les estimations de $\tilde d_a$, $\dot d$, $\tilde\omega_a$, $\dot\omega$ déduites des éqs. (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) et (3.2.6).

4 Estimations de $\tilde d_a$, $\dot d$, $\tilde\omega_a$ et $\dot\omega$

Dans toute la suite, nous fixerons $A < \tau_*$, et supposerons que la solution de (1.1.1), (1.1.2) est de classe C^∞ pour $0 \leqq t \leqq T \leqq \frac{A^2}{\varepsilon^2}$.

En utilisant la stratégie développée au §3 avec pour fonctions de départ (ρ_a, d_a, ω_a) celles qui ont été décrites en 1.3, on obtiendra des estimations de $\dot{\rho}$, $\dot{d}$ et $\dot{\omega}$ pour $t \in [0, T]$ où interviennent des constantes dépendant de A mais pas de T (on omettra d'écrire explicitement cette dépendance pour ne pas alourdir).

Nous pouvons supposer de plus, pour $t \in [0, T]$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, les inégalités

$$\|\dot{\rho}\|_0 + |\nabla_{x,t}\, \dot{\rho}|_2 < C_0 \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}} \tag{4.1}$$

$$|\dot{d}|_2 < C_0 \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}, \qquad |\partial_t \dot{d}|_0 < C_0 \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}},$$

$$\|\dot{\omega}\|_0 < C_0\, \varepsilon,$$

où C_0 est une constante qui ne dépend que du système (1.1.1) et de $\bar{\rho}, \rho_1^0$ et v_1^0.

4.1 Estimations de $\tilde{d}_a$, $\dot{d}$

Lemme 4.1 *Les fonctions $\tilde{d}_a$ et $\dot{d}$ définies par* (3.2.1) *et* (3.2.3) *vérifient:*

(i) *Pour tout α,*

$$\|\partial_{x,t}^{\alpha}\, \tilde{d}_a\|_0 \leqq C_\alpha \frac{\varepsilon^4}{1+\varepsilon^{6/5} t}, \qquad |\partial_{x,t}^{\alpha}\, \tilde{d}_a|_0 \leqq C_\alpha \frac{\varepsilon^4 (1+t)^{1/2}}{1+\varepsilon^{6/5} t}.$$

(ii) *Pour $k = 0, 1, 2$,*

$$|\dot{d}|_k \leqq C\, |\nabla_{x,t}\, \dot{\rho}|_k.$$

Preuve. (i) Les estimations de $\tilde{d}_a$ sont les mêmes que celles de R_a rappelées en (1.3.18), à cause de (1.3.13) et des propriétés de I établies au lemme 2.1. Par exemple, R_a est de moyenne nulle et supportée pour $r \leqq \bar{c}t + R_0$, donc $|I(R_a)|_0 \leqq Ct |R_a|_0$, et $|\tilde{d}_a|_0 \leqq C |R_a|_0 + C \|t \rho_a'\|_0 |R_a|_0 \leqq C |R_a|_0$. On raisonne de même pour les dérivées, en écrivant $I(R_a)\, \rho_a' = \sum \frac{x_j\, I(R_a)}{r} \partial_j \rho_a$.

(ii) Comme $\dot{d} = \frac{\dot{R}}{\rho} - \frac{\rho'}{\rho^2} I(\dot{R})$, $|\dot{d}|_0 \leqq C |\dot{R}|_0 + Ct \|\nabla \rho\|_0 |\dot{R}|_0$ car $\dot{R}$ est de moyenne nulle et supportée pour $r \leqq \bar{c}t + R_0$. Or $t \|\nabla \rho_a\|_0 \leqq C_A$ par (1.3.13) et $t\|\nabla \dot{\rho}\|_0 \leqq C_A$ par (4.1); de plus $|\dot{R}|_0 \leqq C |\nabla_{x,t}\, \dot{\rho}|_0$ par (1.3.14) et (1.3.15), d'où $|\dot{d}|_0 \leqq C_A |\nabla_{x,t}\, \dot{\rho}|_0$.

On écrit ensuite

$$\partial_k \dot{d} = \frac{\partial_k \dot{R}}{\rho} - \frac{\partial_k \rho}{\rho^2} \dot{R} - \sum \left[\frac{\partial_{jk}^2 \rho}{\rho^2} \frac{x_j I(\dot{R})}{r} - 2 \frac{\partial_j \rho\, \partial_k \rho}{\rho^3} \frac{x_j I(\dot{R})}{r} + \frac{\partial_j \rho}{\rho^2} \partial_k \frac{x_j I(\dot{R})}{r} \right],$$

puis $\partial_{jk}^2 \rho = \partial_{jk}^2 \rho_a + \partial_{jk}^2 \dot{\rho}$; grâce à (4.1), on obtient

$$|\partial_k \dot{d}|_0 \leqq C(|\dot{R}|_0 + |\nabla \dot{R}|_0 + |\nabla^2 \dot{\rho}|_0), \quad \text{car} \quad \|I(\dot{R})\|_0 \leqq Ct \|\dot{R}\|_0 \leqq C_A.$$

Comme

$$-\nabla \dot{R}=\nabla \partial_t \dot{\rho}+(d_a+\tilde{d}_a)\nabla \dot{\rho}+\dot{\rho}\nabla(d_a+\tilde{d}_a)+\sum \nabla \frac{x_j I(d_a+\tilde{d}_a)}{r}\partial_j \dot{\rho}$$
$$+\sum \frac{x_j I(d_a+\tilde{d}_a)}{r}\nabla \partial_j \dot{\rho},$$

il vient $|\nabla \dot{R}|_0 \leqq C|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_1$, ce qui prouve $|\dot{d}|_1 \leqq C|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_1$.

Enfin,

$$\begin{aligned}\partial_{ik}^2 \dot{d}=&\frac{\partial_{ik}^2 \dot{R}}{\rho}-\frac{(\partial_i\rho)\,\partial_k \dot{R}+(\partial_k \rho)\,\partial_i \dot{R}}{\rho^2}-\frac{(\partial_{ik}^2\rho)\,\dot{R}}{\rho^2}+2\frac{(\partial_i \rho)(\partial_k \rho)\,\dot{R}}{\rho^3}\\
&-\sum\Bigg[\frac{\partial_{ijk}^3 \rho}{\rho^2}\frac{x_j I(\dot{R})}{r}-2\frac{(\partial_{jk}^2\rho)(\partial_i\rho)}{\rho^3}\frac{x_j I(\dot{R})}{r}+\frac{\partial_{jk}^2\rho}{\rho^2}\partial_i\frac{x_j I(\dot{R})}{r}\\
&-2\frac{(\partial_{ij}^2\rho)\,\partial_k\rho+\partial_j\rho\,\partial_{ik}^2\rho}{\rho^3}\frac{x_j I(\dot{R})}{r}+6\frac{\partial_i\rho\,\partial_j\rho\,\partial_k\rho}{\rho^4}\frac{x_j I(\dot{R})}{r}\\
&-2\frac{\partial_j\rho\,\partial_k\rho}{\rho^3}\partial_i\left(\frac{x_j I(\dot{R})}{r}\right)+\frac{\partial_{ij}^2\rho}{\rho^2}\partial_k\left(\frac{x_j I(\dot{R})}{r}\right)\\
&-2\frac{\partial_i\rho\,\partial_j\rho}{\rho^3}\partial_k\frac{x_j I(\dot{R})}{r}+\frac{\partial_j\rho}{\rho^2}\partial_{ik}^2\frac{x_j I(\dot{R})}{r}\Bigg].\end{aligned}$$

On montre comme précédemment que

$$|\dot{R}|_2 \leqq C|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2, \quad \text{et} \quad |\nabla^2 \dot{d}|_0 \leqq C|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2. \quad \square$$

4.2 Estimations de $\tilde{\omega}_a$, $\dot{\omega}$

Lemme 4.2 *Les fonctions $\tilde{\omega}_a$ et $\dot{\omega}$ définies par* (3.2.4) *et* (3.2.6) *vérifient:*

(i) *Il existe R_A tel que $\tilde{\omega}_a(x,t)=0$ et $\dot{\omega}(x,t)=0$ pour $|x|\geqq R_A$.*

(ii) *Pour tout α, $\|\partial_{x,t}^\alpha \tilde{\omega}_a\|_0 \leqq C_\alpha \varepsilon^2$. De plus, $\|\partial_t \tilde{\omega}_a\|_1 \leqq C\dfrac{\varepsilon^2}{(1+t)^{1/2}}$.*

(iii) *Pour $k=0,1,2$, $|\dot{\omega}|_k \leqq C\varepsilon \int_0^t |\dot{d}|_k\, ds$. En particulier, $\|\dot{\omega}\|_0 \leqq C\varepsilon$.*

Preuve. (i) Le second membre de (3.2.4) est nul pour $|x|\geqq R_0$; comme $D_t^a=\partial_t+I(d_a+\tilde{d}_a)\,\partial_r$, le point (i) pour $\tilde{\omega}_a$ résulte du fait que $\int_0^T \|I(d_a+\tilde{d}_a)\|_0\, ds \leqq C_A$, en prenant $R_A=R_0+C_A$.

Pour $\dot{\omega}$, on raisonne de même à partir de (3.2.6), grâce à l'inégalité $\|I(\dot{d})\|_0 \leqq C|\dot{d}|_0 \leqq CC_0\dfrac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}$ (lemme 2.1 et (4.1)).

(ii) Comme le multiplicateur $e^{\int_0^T \left\|d_a+\tilde{d}_a\right\|_0 ds}$ est borné par C_A, $\|\tilde{\omega}_a\|_0 \leqq C \int_0^t \{\|\Omega_a\|_0 + \varepsilon \|\tilde{d}_a\|_0\} \, ds \leqq C\varepsilon^2$ d'après le lemme 4.1 et (1.3.19). Pour $\nabla \tilde{\omega}_a$ on écrit

$$(D_t^a + (d_a+\tilde{d}_a))\,\partial_k \tilde{\omega}_a + \sum \partial_k \left(\frac{x_j I(d_a+\tilde{d}_a)}{r}\right) \partial_j \tilde{\omega}_a$$
$$= -\tilde{\omega}_a \, \partial_k (d_a+\tilde{d}_a) - \partial_k \Omega_a - \partial_k(\omega_a \tilde{d}_a + I(\tilde{d}_a)\,\omega_a'),$$

et comme $\left\|\nabla \dfrac{x_j I(d_a+\tilde{d}_a)}{r}\right\|_0 \leqq C \|d_a+\tilde{d}_a\|_0$, et $\int_0^T \|d_a+\tilde{d}_a\|_1 \leqq C_A$, on obtient $\|\nabla \tilde{\omega}_a\|_0 \leqq C\varepsilon^2$; on procède de même pour les autres dérivées.

Enfin, en tirant $\partial_t \tilde{\omega}_a$ de (3.2.4), on trouve

$$\|\partial_t \tilde{\omega}_a\|_0 \leqq \|\Omega_a\|_0 + C\varepsilon \|\tilde{d}_a\|_0 + C\frac{\varepsilon^3}{(1+t)^{1/2}} \leqq C \frac{\varepsilon^2}{(1+t)^{1/2}}$$

et de même pour les dérivées.

(iii) L'inégalité d'énergie standard (cf. par exemple [6]) appliquée à (3.2.6) donne

$$|\dot{\omega}|_0 \leqq C e^{\int_0^T \|d\|_0 ds} \int_0^t \{|\dot{d}(\omega_a+\tilde{\omega}_a)|_0 + |I(\dot{d})(\omega_a+\tilde{\omega}_a)'|_0\} \, ds.$$

Or $|\dot{d}(\omega_a+\tilde{\omega}_a)|_0 \leqq C\varepsilon |\dot{d}|_0$, $|I(\dot{d})(\omega_a+\tilde{\omega}_a)'|_0 \leqq C\varepsilon |\dot{d}|_0$ à cause du lemme 2.1, a.i) et du fait que $\omega_a+\tilde{\omega}_a$ est nulle hors d'une boule fixe en x; d'autre part $\int_0^T \|d\|_0 \, ds \leqq C_A$ par (4.1), d'où l'inégalité pour $k=0$.

Pour le gradient, on écrit

$$D_t \partial_k \dot{\omega} + d\,\partial_k \dot{\omega} + \sum \partial_k \left(\frac{x_j I(d)}{r}\right) \partial_j \dot{\omega}$$
$$= -(\partial_k d)\,\dot{\omega} - (\partial_k \dot{d})(\omega_a+\tilde{\omega}_a) - \dot{d}\,\partial_k(\omega_a+\tilde{\omega}_a)$$
$$-\sum \partial_k \left(\frac{x_j I(\dot{d})}{r}\right) \partial_j(\omega_a+\tilde{\omega}_a) - \sum \frac{x_j I(\dot{d})}{r}\, \partial_{kj}^2(\omega_a+\tilde{\omega}_a),$$

et l'inégalité d'énergie donne comme précédemment

$$|\nabla \dot{\omega}|_0 \leqq C \int_0^t \{\|\nabla(d_a+\tilde{d}_a)\|_0 |\dot{\omega}|_0 + \|\dot{\omega}\|_0 |\nabla \dot{d}|_0 + \|\omega_a+\tilde{\omega}_a\|_0 |\nabla \dot{d}|_0$$
$$+ \|\nabla(\omega_a+\tilde{\omega}_a)\|_0 |\dot{d}|_0 + \|\nabla^2(\omega_a+\tilde{\omega}_a)\|_0 |\dot{d}|_0\} \, ds.$$

Comme $\|\dot{\omega}\|_0 \leqq C\varepsilon$ par le même argument qu'en (ii) (ou l'hypothèse d'induction), on trouve finalement

$$|\nabla\dot{\omega}|_0 \leqq C\varepsilon \int_0^t |\dot{d}|_1\, ds + C\varepsilon\left(\int_0^t |\dot{d}|_0\, ds\right)\left(\int_0^t \|\nabla(d_a+\tilde{d}_a)\|_0\, ds\right)$$
$$\leqq C\varepsilon \int_0^t |\dot{d}|_1\, ds$$

grâce aux propriétés de $d_a+\tilde{d}_a$.

Enfin,

$$D_t\,\partial_{ik}^2\dot{\omega} + d\,\partial_{ik}^2\dot{\omega} + \sum \partial_i\left(\frac{x_j I(d)}{r}\right)\partial_{jk}^2\dot{\omega}$$
$$+\sum \partial_k\left(\frac{x_j I(d)}{r}\right)\partial_{ij}^2\dot{\omega} + \sum \partial_{ik}^2\left(\frac{x_j I(d)}{r}\right)\partial_j\dot{\omega}$$
$$= -\partial_i d\,\partial_k\dot{\omega} - \partial_k d\,\partial_i\dot{\omega} - \partial_{ik}^2 d\,\dot{\omega} - (\partial_{ik}^2\dot{d})(\omega_a+\tilde{\omega}_a)$$
$$-(\partial_k\dot{d})\,\partial_i(\omega_a+\tilde{\omega}_a) - (\partial_i\dot{d})\,\partial_k(\omega_a+\tilde{\omega}_a) - \dot{d}\,\partial_{ik}^2(\omega_a+\tilde{\omega}_a)$$
$$-\sum \partial_{ik}^2\left(\frac{x_j I(\dot{d})}{r}\right)\partial_j(\omega_a+\tilde{\omega}_a) - \sum \partial_k\left(\frac{x_j I(\dot{d})}{r}\right)\partial_{ij}^2(\omega_a+\tilde{\omega}_a)$$
$$-\sum \partial_i\left(\frac{x_j I(\dot{d})}{r}\right)\partial_{kj}^2(\omega_a+\tilde{\omega}_a) - \sum \frac{x_j I(\dot{d})}{r}\,\partial_{ikj}^3(\omega_a+\tilde{\omega}_a).$$

Seuls les termes $\partial_{ik}^2\left(\frac{x_j I(\dot{d})}{r}\right)\partial_j\dot{\omega}$ et $\partial_i\dot{d}\,\partial_k\dot{\omega}$ posent un problème nouveau: $|\partial_i f\,\partial_k g|_0 \leqq C|f|_2\,\|g\|_0 + C\|f\|_0\,|g|_2$, donc les normes L^2 de ces termes sont majorées par $\|\dot{\omega}\|_0\,|\dot{d}|_2 + \|\dot{d}\|_0\,|\dot{\omega}|_2$. On obtient par l'inégalité d'énergie, le lemme 2.1, le lemme 4.1 et les estimations de $|\dot{\omega}|_1$ prouvées ci-dessus,

$$|\dot{\omega}|_2 \leqq C\varepsilon \int_0^t |\dot{d}|_2\, ds + C\int_0^t \|\dot{d}\|_0\,|\dot{\omega}|_2\, ds,$$

d'où, par le lemme de Gronwall, l'estimation du lemme. □

5 Estimations d'énergie

Ce paragraphe contient les inégalités nécessaires aux estimations de $\dot{\rho}$ à l'aide de (3.3.1).

Ces inégalités sont de deux sortes:

1. Il faut vérifier que les inégalités d'énergie standard pour L (dont les coefficients dépendent de ρ et d) sont valables avec des constantes fixes.
2. Il faut établir des inégalités d'énergie meilleures dans le cas où le second membre de l'équation est de moyenne (spatiale) nulle, comme c'est le cas par exemple pour les termes F_1, F_2 (voir lemme 3.3).

5.1 Inégalités d'énergie pour l'opérateur L

Lemme 5.1 *Soit* $L=\partial_t^2+2v^d\nabla\partial_t-\sum\tilde{\gamma}_{ij}\partial_{ij}^2, \tilde{\gamma}_{ij}=c^2(\rho)\delta_{ij}-\frac{x_i x_j}{r^2}(I(d))^2$, *l'opérateur défini au lemme* 3.3.
(i) *Sous les hypothèses* (4.1), *l'opérateur L vérifie*

$$(5.1.1)\qquad |\nabla_{x,t}u(\cdot,t)|_0\leqq C\left\{|\nabla u(\cdot,0)|_0+|\partial_t u(\cdot,0)|_0+\int_0^t|Lu(\cdot,s)|_0\,ds\right\}.$$

(ii) *Si* $u\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}_x^2)$ *vérifie* $Lu=f$, $u(x,0)=\partial_t u(x,0)=0$, *alors*

$$(5.1.2)\qquad |\nabla_{x,t}u(\cdot,t)|_2\leqq C\sup_{0\leqq s\leqq t}\{|\nabla_{x,t}u|_0+\sum|\nabla_{x,t}V_j|_0+\sum|\nabla_{x,t}V_{jk}|_0\},$$

où les fonctions V_j *et* V_{jk} *sont définies par*

$$LV_j=\partial_j f,\qquad V_j(x,0)=\partial_t V_j(x,0)=0$$
$$LV_{jk}=\partial_{jk}^2 f,\qquad V_{jk}(x,0)=\partial_t V_{jk}(x,0)=0.$$

Preuve. (i) Dans l'inégalité (5.1.1), la constante C vaut en général cte $e^{\mathrm{cte}\int_0^t K(s)\,s}$, où

$$K=\sum\{\|\partial_i\tilde{\gamma}_{jk}\|_0+\|\nabla a_i\|_0+\|\partial_t a_i\|_0\},\quad\text{avec}\quad a_i=\frac{x_i I(d)}{r}$$

(cf. par exemple Hörmander [5]). Ici, $\|a_i\|_0\leqq\|I(d_a+\tilde{d}_a)\|_0+C|\dot{d}|_0$, $\|\nabla a_i\|_0\leqq C\|d\|_0$, $\|\partial_t a_i\|_0\leqq\|\partial_t I(d_a)\|_0+\|\partial_t I(\tilde{d}_a)\|_0+C|\partial_t\dot{d}|_0$. Comme $\|\rho-\bar{\rho}\|_0$ et $\|a_i\|_0$ sont aussi petits que l'on veut, on a

$$\|\nabla_{x,t}\tilde{\gamma}_{jk}\|_0\leqq C\{\|\nabla_{x,t}\rho\|_0+\sum\|\nabla_{x,t}a_i\|_0\}.$$

D'après (4.1) et les propriétés de $d_a+\tilde{d}_a$, $\int_0^t K(s)\,ds\leqq C_A$, d'où le point (i).

(ii) On note $a_i=A_i+\dot{A}_i$, $A_i=\frac{x_i}{r}I(d_a+\tilde{d}_a)$, $\dot{A}_i=\frac{x_i}{r}I(\dot{d})$, et de même

$$\tilde{\gamma}_{ik}=\Gamma_{ik}+\dot{\Gamma}_{ik},\qquad\Gamma_{ik}=c^2(\rho_a)\delta_{ik}-\frac{x_i x_k}{r^2}(I(d_a+\tilde{d}_a))^2,$$

$$\dot{\Gamma}_{ik}=(c^2(\rho)-c^2(\rho_a))\delta_{ik}-\frac{x_i x_k}{r^2}I(\dot{d})(I(\dot{d})+2I(d_a+\tilde{d}_a)).$$

(a) On a

$$\partial_j Lu=\partial_j f=L\partial_j u-F_j,\qquad\partial_{jk}^2 Lu=\partial_{jk}^2 f=L\partial_{jk}^2 u-F_{jk},$$

où

$$F_j=\sum\partial_j(\Gamma_{ik}+\dot{\Gamma}_{ik})\partial_{ik}^2 u-2\sum\partial_j(A_i+\dot{A}_i)\partial_{it}^2 u,$$
$$F_{jk}=-2\sum(\partial_k a_i)\partial_t\partial_{ij}^2 u-2\sum(\partial_j a_i)\partial_t\partial_{ik}^2 u-2\sum(\partial_{jk}^2 a_i)\partial_{it}^2 u$$
$$+\sum(\partial_k\tilde{\gamma}_{il})\partial_{ilj}^3 u+\sum(\partial_j\tilde{\gamma}_{il})\partial_{ilk}^3 u+\sum(\partial_{jk}^2\tilde{\gamma}_{il})\partial_{it}^2 u.$$

De plus

$$|F_j|_0 \leqq C\sum \|\nabla a_i\|_0 |\nabla \partial_t u|_0 + C\sum \|\nabla \tilde{\gamma}_{ik}\|_0 |\nabla^2 u|_0,$$

et

$$\begin{aligned}|F_{jk}|_0 \leqq C\sum\{&\|\nabla a_i\|_0 |\nabla^2 \partial_t u|_0 + \|\nabla^2 A_i\|_0 |\nabla \partial_t u|_0 \\ &+(|\nabla \dot{A}_i|_2 \|\partial_t u\|_0 + \|\nabla \dot{A}_i\|_0 |\partial_t u|_2) + C\|\nabla \tilde{\gamma}_{il}\|_0 |\nabla^3 u|_0 \\ &+ \|\nabla^2 \Gamma_{il}\|_0 |\nabla^2 u|_0 + (|\nabla \dot{\Gamma}_{il}|_2 \|\nabla u\|_0 + \|\nabla \dot{\Gamma}_{il}\|_0 |\nabla u|_2)\}.\end{aligned}$$

(b) Les estimations nécessaires sur les A_{ij} et $\dot{A}_{ij}$ découlent du lemme 2.1.

Pour évaluer $|\nabla \dot{\Gamma}_{il}|_2$, on écrit

$$c^2(\rho) - c^2(\rho_a) = 2\dot{\rho} \int_0^1 (c c')(\rho_a + s\dot{\rho})\, ds = 2\dot{\rho} I,$$

et on sépare ρ_a et $\dot{\rho}$ pour les majorations de $\nabla^2 I$, $\nabla^3 I$. On trouve sans difficulté $|\nabla \dot{\Gamma}_{il}|_2 \leqq C(|\dot{d}| + |\nabla \dot{\rho}|_2)$ compte tenu de (4.1) et des propriétés de $d_a + \tilde{d}_a$ et ρ_a.

(c) Comme

$$|\nabla_{x,t}(\partial_j u - V_j)|_0 \leqq C \int_0^t |F_j|_0\, ds,$$

$$|\nabla_{x,t}(\partial_{jk}^2 u - V_{jk})|_0 \leqq C \int_0^t |F_{jk}|_0\, ds, \qquad \text{par (i)},$$

on trouve, en utilisant (a) et (b) et le lemme 4.1,

$$\begin{aligned}|\nabla_{x,t} u|_2 \leqq\, & |\nabla_{x,t} u|_0 + \sum |\nabla_{x,t} V_j|_0 + \sum |\nabla_{x,t} V_{jk}|_0 \\ & + C\int_0^t \|\nabla_{x,t} u\|_0 |\nabla_{x,t} \dot{\rho}|_2\, ds + C\int_0^t |\nabla_{x,t} u|_2\, \varphi(s)\, ds,\end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\varphi(s) = \sum(\|\nabla a_i\|_0 + \|\nabla \tilde{\gamma}_{il}\|_0 + \|\nabla^2 A_i\|_0 + \|\nabla \dot{A}_i\|_0 + \|\nabla^2 \Gamma_{il}\|_0 + \|\nabla \dot{\Gamma}_{il}\|_0).$$

Les propriétés de ρ_a et $d_a + \tilde{d}_a$ et (4.1) montrent que $\int_0^t \varphi(s)\, ds \leqq C_A$, d'où l'estimation

$$|\nabla_{x,t} u|_2 \leqq C S(t) + C\int_0^t \|\nabla_{x,t} u\|_0 |\nabla_{x,t} \dot{\rho}|_2\, ds,$$

où

$$S(t) = \sup_{0 \leqq s \leqq t} \{|\nabla_{x,t} u|_0 + \sum |\nabla_{x,t} V_j|_0 + \sum |\nabla_{x,t} V_{jk}|_0\}.$$

En particulier,

$$\|\nabla_{x,t} u\|_0 \leqq CS + C \int_0^t \|\nabla_{x,t} u\|_0 |\nabla_{x,t} \dot{\rho}|_2 \, ds,$$

d'où $\|\nabla_{x,t} u\|_0 \leqq CS(t)$, et finalement

$$|\nabla_{x,t} u|_2 \leqq CS(t) + CS(t) \int_0^t |\nabla_{x,t} \dot{\rho}|_2 \, ds \leqq CS(t).$$

5.2 Inégalités d'énergie pour des seconds membres de moyenne nulle

Ces inégalités font l'objet du lemme suivant.

Lemme 5.2 *Soit* $L = \partial_t^2 + 2v^d \nabla \partial_t - \sum \tilde{\gamma}_{ij} \partial_{ij}^2$ *comme au lemme* 5.1, *et* u, $g_i \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_x^2)$ *telles que* $Lu = \sum \partial_i g_i$, $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$. *Alors*

$$|\nabla_{x,t} u|_0 \leqq C \sum \left(|g_i(x, 0)|_0 + \int_0^t |\partial_t g_i(x, s)|_0 \, ds \right).$$

Preuve. Définissons v_i par $Lv_i = g_i$, $v_i(x, 0) = \partial_t v_i(x, 0) = 0$. On a

$$L(u - \sum \partial_i v_i) = 2 \sum (\partial_i a_j) \partial_{jt}^2 v_i - \sum (\partial_i \tilde{\gamma}_{jk}) \partial_{jk}^2 v_i.$$

D'autre part

$$L \partial_t v_i = \partial_t g_i - 2 \sum (\partial_t a_j) \partial_{jt}^2 v_i + 2 \sum (\partial_t \tilde{\gamma}_{jk}) \partial_{jk}^2 v_i,$$

et

$$\partial_t v_i(x, 0) = 0, \qquad \partial_t(\partial_t v_i)(x, 0) = g_i(x, 0).$$

L'inégalité du lemme 5.1 donne alors

$$|\partial_t^2 v_i|_0 + |\nabla \partial_t v_i|_0 \leqq C \left(|g_i(x, 0)|_0 + \int_0^t |\partial_t g_i(x, s)|_0 \right) ds$$
$$+ \int_0^t K(s) (|\nabla \partial_t v_i|_0 + |\nabla^2 v_i|_0) \, ds,$$

où K est défini dans la preuve du lemme 5.1. En utilisant l'équation $Lv_i = g_i$, on obtient la même inégalité avec en plus $|\sum \tilde{\gamma}_{jk} \partial_{jk}^2 v_i|_0$ au membre de gauche. Or

$$|c^2 \Delta v_i|_0 \leqq |\sum \tilde{\gamma}_{jk} \partial_{jk}^2 v_i|_0 + \sum |a_j a_k \partial_{jk}^2 v_i|_0,$$

d'où

$$\text{cte} \sum |\nabla^2 v_i|_0 \leqq |c^2 \Delta v_i|_0 \leqq |\sum \tilde{\gamma}_{jk} \partial_{jk}^2 v_i|_0 + C \varepsilon^2 \sum |\nabla^2 v_i|_0;$$

pour ε assez petit, il vient

$$z(t) \leqq C \sum \left(|g_i(\cdot, 0)|_0 + \int_0^t |\partial_t g_i(\cdot, s)|_0 \, ds + \int_0^t K(s) \, z(s) \, ds \right),$$

où

$$z(t) = \sum \sup_{t' \leqq t} (|\partial_t^2 v_i(\cdot, t')|_0 + |\nabla \partial_t v_i(\cdot, t')|_0 + |\nabla^2 v_i(\cdot, t')|_0).$$

Par le lemme de Gronwall et le fait que $\int_0^t K(s) \, ds \leqq C_A$, on trouve

$$z(t) \leqq C \sum \left(|g_i(\cdot, 0)|_0 + \int_0^t |\partial_t g_i(\cdot, s)|_0 \, ds \right).$$

Comme l'inégalité d'énergie appliquée à $u - \sum \partial_i v_i$ donne

$$|\nabla_{x,t} u|_0 \leqq C \sum \left(|\nabla \partial_t v_i|_0 + |\nabla^2 v_i|_0 + \left(\int_0^t K(s) \, ds \right) z(t) \right),$$

la preuve est complète. □

Remarquons que si les g_i étaient indépendants de t, on améliorerait d'un facteur t l'estimation d'énergie usuelle.

Dans l'application de ce lemme à l'estimation de $\dot{\rho}$, on peut ainsi exploiter le caractère «presque stationnaire» de ω, comme on va le préciser au paragraphe suivant.

6 Evaluations des dérivées de k et k_a

Rappelons les termes F_1 et F_2 définis au lemme 3.3:

$$F_1 = -2 \frac{\bar{\rho}}{r} \partial_r k, \qquad F_2 = -\frac{2}{r} \partial_r [\dot{\rho}(k + k_a)],$$

où $k = I(\dot{\omega}) \; I(\omega_a + \tilde{\omega}_a) + \frac{1}{2}(I(\dot{\omega}))^2$, $k_a = I(\tilde{\omega}_a) \; I(\omega_a) + \frac{1}{2}(I(\tilde{\omega}_a))^2$. Remarquons que k_a est l'analogue de k, en «faisant» $\tilde{\omega}_a = 0$ puis en prenant $\dot{\omega} = \tilde{\omega}_a$.

Enfin, si $k(r, t)$ est à support compact et nul en $r = 0$, $\frac{1}{r} \partial_r k$ est de moyenne nulle et $\frac{1}{r} \partial_r k = \sum \partial_i g_i$, où $g_i(x, t) = \frac{x_i k}{r^2}$.

Le lemme suivant donne les estimations importantes des dérivées de k et k_a.

Lemme 6.1 *Les quantités k et k_a vérifient les inégalités suivantes:*

(a) (i) $$\left|\partial_t \frac{k}{r^2}\right|_0 + \left|\partial_t \frac{k'}{r}\right|_0 \leqq C\varepsilon^2 |\nabla_{x,t}\dot\rho|_0 + C\varepsilon(\varepsilon\|d\|_0 + \|\partial_t\tilde\omega_a\|_0)\int_0^t |\nabla_{x,t}\dot\rho|_1\,ds.$$

(ii) $$\left|\partial_t\left(\frac{k}{r^2}\right)'\right|_0 + \left|\partial_t\left(\frac{k'}{r}\right)'\right|_0 \leqq C\varepsilon^2 |\nabla_{x,t}\dot\rho|_1 + C\varepsilon(\varepsilon\|\dot d\|_0 + \varepsilon\|d_a + \tilde d_a\|_1 + \|\partial_t\tilde\omega_a\|_1)\int_0^t |\nabla_{x,t}\dot\rho|_2\,ds.$$

$$\left|\frac{k}{r^2}\right|_0 + \left|\frac{k'}{r}\right|_0 + \left|\left(\frac{k}{r^2}\right)'\right|_0 + \left|\left(\frac{k'}{r}\right)'\right|_0 + \left|\frac{1}{r}\left(\frac{k'}{r}\right)'\right|_0 + \left|\left(\frac{k'}{r}\right)''\right|_0 \leqq C\varepsilon^2\int_0^t |\nabla_{x,t}\dot\rho|_2\,ds.$$

(iii) $$\left\|\frac{k}{r^2}\right\|_0 + \left\|\frac{k'}{r}\right\|_0 + \left\|\partial_t\frac{k}{r^2}\right\|_0 + \left\|\partial_t\frac{k'}{r}\right\|_0 \leqq C\varepsilon^2.$$

(b) (i) $$\left\|\frac{k_a}{r^2}\right\|_0 + \left\|\frac{k_a'}{r}\right\|_0 \leqq C\varepsilon^2.$$

(ii) $$\left\|\partial_t\frac{k_a}{r^2}\right\|_0 + \left\|\partial_t\frac{k_a'}{r}\right\|_0 + \left\|\partial_t\left(\frac{k_a}{r^2}\right)'\right\|_0 + \left\|\partial_t\left(\frac{k_a'}{r}\right)'\right\|_0 \leqq C\varepsilon\|\partial_t\tilde\omega_a\|_1.$$

Preuve. (a) On a $\partial_t k = I(\partial_t\dot\omega)\,I(\omega) + I(\dot\omega)\,I(\partial_t\tilde\omega_a)$, car $\partial_t\omega_a\equiv 0$, et $-I(\partial_t\dot\omega) = I(d)\,\dot\omega + I(\dot d)(\omega_a+\tilde\omega_a)$ à cause de (3.2.6). Donc

$$\left|\partial_t\frac{k}{r^2}\right|_0 \leqq C\varepsilon^2|\dot d|_0 + C(\varepsilon\|d\|_0 + \|\partial_t\tilde\omega_a\|_0)|\dot\omega|_0.$$

De plus

$$\frac{-1}{r}(\partial_t k)' = \frac{1}{r}[I(d)\,I(\omega)\,\dot\omega + (\omega_a+\tilde\omega_a)\,I(\dot d)\,I(\omega) - I(\dot\omega)\,I(\partial_t\tilde\omega_a)]',$$

et

$$\left|\partial_t\frac{k'}{r}\right|_0 \leqq C\varepsilon^2|\dot d|_0 + C(\varepsilon\|d\|_0 + \|\partial_t\tilde\omega_a\|_0)|\dot\omega|_1.$$

On obtient donc (i) grâce aux lemmes 4.1 et 4.2.

Les termes qui contiennent $\partial_t k$ au point (ii) se traitent de façon analogue. Considérons ensuite $\frac{k'}{r}$:

$$\left(\frac{k'}{r}\right)' = I''(\dot\omega)\frac{I(\omega)}{r} + I'(\dot\omega)\left(\partial_r\frac{I(\omega)}{r}\right) + \left(\partial_r\frac{I(\dot\omega)}{r}\right)I'(\omega_a+\tilde\omega_a) + \frac{I(\dot\omega)}{r}I''(\omega_a+\tilde\omega_a);$$

comme $I'(f) = f - \frac{I(f)}{r}$, $I''(f) = f' - \frac{I(rf')}{r^2}$, on a $\left|\left(\frac{k'}{r}\right)'\right|_0 \leqq C\varepsilon|\dot\omega'|_1$, et de même pour $\left|\left(\frac{k}{r^2}\right)'\right|_0$.

Enfin,

$$\frac{1}{r}\left(\frac{k'}{r}\right)'=\frac{1}{r}\left(\dot\omega'-\frac{I(r\dot\omega')}{r^2}\right)\frac{I(\omega)}{r}+I'(\dot\omega)\frac{I(r\omega')}{r^3}+\frac{I(r\dot\omega')}{r^3}I'(\omega_a+\tilde\omega_a)$$
$$+\frac{I(\dot\omega)}{r}\frac{1}{r}\left((\omega_a+\tilde\omega_a)'-\frac{I(r(\omega_a+\tilde\omega_a)')}{r^2}\right),$$

d'où $\left|\frac{1}{r}\left(\frac{k'}{r}\right)'\right|_0\leqq C\varepsilon\left|\frac{\dot\omega'}{r}\right|_0$. De même

$$\left(\frac{k'}{r}\right)''=\left(\dot\omega''-\frac{I(r^2\dot\omega'')}{r^3}\right)\frac{I(\omega)}{r}+2\left(\dot\omega'-\frac{I(r\dot\omega')}{r^2}\right)\frac{I(r\omega')}{r^2}+I'(\dot\omega)\frac{I(r^2\omega'')}{r^3}$$
$$+\frac{I(r^2\dot\omega'')}{r^3}I'(\omega_a+\tilde\omega_a)+\frac{I(r\dot\omega')}{r^2}I''(\omega_a+\tilde\omega_a)$$
$$+\frac{I(r\dot\omega')}{r^2}\left((\omega_a+\tilde\omega_a)'-\frac{I(r(\omega_a+\tilde\omega_a)')}{r^2}\right)$$
$$+\frac{I(\dot\omega)}{r}\left((\omega_a+\tilde\omega_a)''-\frac{I(r^2(\omega_a+\tilde\omega_a)'')}{r^3}\right),$$

d'où $\left|\left(\frac{k'}{r}\right)''\right|_0\leqq C\varepsilon\left(|\dot\omega''|_0+\left|\frac{\dot\omega'}{r}\right|_0+|\dot\omega|_0\right)$. Comme $|\dot\omega|_0+\left|\frac{\dot\omega'}{r}\right|_0+|\dot\omega''|_0\leqq C|\dot\omega|_2$, on obtient l'estimation voulue.

Le point (iii) est immédiat.

(b) Le point (i) est immédiat.

Pour le point (ii), on écrit $\partial_t k_a=I(\omega_a+\tilde\omega_a)\,I(\partial_t\tilde\omega_a)$. On en déduit, par exemple,

$$\left(\frac{\partial_t k_a'}{r}\right)'=\left(I'(\omega_a+\tilde\omega_a)\frac{I(\partial_t\tilde\omega_a)}{r}+\frac{I(\omega_a+\tilde\omega_a)}{r}I'(\partial_t\tilde\omega_a)\right)'$$
$$=I''(\omega_a+\tilde\omega_a)\frac{I(\partial_t\tilde\omega_a)}{r}+I'(\omega_a+\tilde\omega_a)\frac{I(r(\partial_t\tilde\omega_a)')}{r^2}$$
$$+\frac{I(r(\omega_a+\tilde\omega_a)')}{r^2}I'(\partial_t\tilde\omega_a)+\frac{I(\omega_a+\tilde\omega_a)}{r}I''(\partial_t\tilde\omega_a);$$

d'où $\left\|\left(\frac{\partial_t k_a'}{r}\right)'\right\|_0\leqq C\varepsilon\|\partial_t\tilde\omega_a\|_1$, et de même pour les autres termes. □

7 Estimations des quantités $|F_i|_2\,(i\geqq 3)$

Au second membre de (3.3.1), les termes F_1 et F_2 sont de moyenne nulle et ont été estimés au §6. Il nous reste à estimer $|F_i|_2$ pour $i\geqq 3$.

Lemme 7.1 *On a*

$$\sum_{i=3}^{6} |F_i|_2 \leqq C \frac{\varepsilon |\log \varepsilon|^{1/2}}{(1+t)^{1/2}} |\nabla_{x,t} \dot\rho|_2 + C \frac{\varepsilon^3}{(1+t)^{1/2}} \int_0^t |\nabla_{x,t} \dot\rho|_2 \, ds.$$

Preuve. Elle est très longue. Nous ne traiterons que des termes typiques parmi de nombreux termes analogues, et soulignerons les points délicats.

1. Montrons $|F_3|_2 \leqq C \dfrac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}} |\nabla_{x,t} \dot\rho|_2 + \dfrac{C\varepsilon^3}{(1+t)^{1/2}} \displaystyle\int_0^t |\nabla_{x,t} \dot\rho|_1 \, ds$.

(a) On a par exemple $I(d)\, I'(\dot d)\, \dot\rho' = \left(\dot d - \dfrac{I(\dot d)}{r}\right) \sum \dfrac{x_j I(d)}{r} \partial_j \dot\rho$, d'où

$$\begin{aligned}
|I(d)\, I'(\dot d)\, \dot\rho'|_2 &\leqq C \sum \left\| \dot d - \frac{I(\dot d)}{r} \right\|_0 \left\| \frac{x_j I(d)}{r} \right\|_0 |\nabla \dot\rho|_2 \\
&\quad + C \sum \| \nabla \dot\rho \|_0 \left(\left\| \frac{x_j I(d_a + \tilde d_a)}{r} \right\|_2 \left| \dot d - \frac{I(\dot d)}{r} \right|_2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \frac{x_j I(\dot d)}{r} \right\|_1 \left| \dot d - \frac{I(\dot d)}{r} \right|_2 + \left\| \dot d - \frac{I(\dot d)}{r} \right\|_0 \left| \nabla^2 \frac{x_j I(\dot d)}{r} \right|_0 \right) \\
&\leqq C \| \dot d \|_0 |\nabla \dot\rho|_2 + C \| \nabla \dot\rho \|_0 |\dot d|_2 + C \| \dot d \|_0 |\dot d|_2 ;
\end{aligned}$$

en effet,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{I(\dot d)}{r} \right|_2 &\leqq C \left(\left| \frac{I(\dot d)}{r} \right|_0 + \left| \frac{1}{r} \partial_r \frac{I(\dot d)}{r} \right|_0 + \left| \partial_r^2 \frac{I(\dot d)}{r} \right|_0 \right) \\
&\leqq C \left(|\dot d|_0 + \left| \frac{\dot d'}{r} \right|_0 + |\dot d''|_0 \right) \leqq C |\dot d|_2
\end{aligned}$$

grâce au lemme 2.1 et sa preuve, et $\| I(d) \|_0 \leqq C$ comme on l'a vu au lemme 5.1.

(b) On a

$$\begin{aligned}
|\rho f'(\rho_a)(\nabla \dot\rho + 2 \nabla \rho_a) \nabla \dot\rho|_2 &\leqq C \| \nabla \dot\rho \|_0 |\nabla \dot\rho|_2 + C \| \nabla \rho_a \|_2 |\nabla \dot\rho|_2 \\
&\quad + (\| \nabla \dot\rho \|_0)^2 |\dot\rho|_2 + C \| \nabla \dot\rho \|_0 \| \nabla \rho_a \|_0 |\dot\rho|_2 .
\end{aligned}$$

Ici le problème peut venir de termes contenant $|\dot\rho|_0$: mais $|\dot\rho|_0 \leqq C t |\nabla \dot\rho|_0$, donc $(\| \nabla \rho_a \|_0 + \| \nabla \dot\rho \|_0) |\dot\rho|_0 \leqq C |\nabla \dot\rho|_0$.

(c) Pour le terme $\dfrac{k}{r} \dot\rho'$, on écrit

$$\left| \frac{k}{r} \dot\rho' \right|_2 \leqq C \left\| \frac{k}{r} \right\|_0 |\nabla \dot\rho|_2 + C \| \nabla \dot\rho \|_0 \left\{ \left| \frac{k}{r^2} \right|_0 + \left| \frac{k'}{r} \right|_0 + \left| \left(\frac{k}{r^2} \right)' \right|_0 + \left| \left(\frac{k'}{r} \right)' \right|_0 \right\},$$

et $\left\{ \quad \right\} \leqq C \varepsilon^2 \displaystyle\int_0^t |\nabla_{x,t} \dot\rho|_1 \, ds$ d'après le lemme 6.1.

(d) On a $\left|\frac{\rho'}{\rho} I(d\partial_t \dot{\rho})\right|_2 \leqq C|\rho' I(d\partial_t \dot{\rho})|_2 + C\|\rho' I(d\partial_t \dot{\rho})\|_0 |\nabla \dot{\rho}|_1$; de plus $\rho' I(d\partial_t \dot{\rho}) = \rho'_a I(d\partial_t \dot{\rho}) + \dot{\rho}' I(d\partial_t \dot{\rho})$, d'où

$$\begin{aligned}|\rho' I(d\partial_t \dot{\rho})|_2 &\leqq C(\|\nabla \rho_a\|_2 + \|\nabla \dot{\rho}\|_0) \sum \left|\frac{x_j I(d\partial_t \dot{\rho})}{r}\right|_2 \\ &\quad + C\left(\sum \left\|\frac{x_j I(d\partial_t \dot{\rho})}{r}\right\|_0\right)|\nabla \dot{\rho}|_2 \\ &\leqq C(\|\nabla \rho_a\|_2 + \|\nabla \dot{\rho}\|_0)(Ct\|d\|_0 |\partial_t \dot{\rho}|_0 + |d\partial_t \dot{\rho}|_1) \\ &\quad + Ct\|d\|_0 \|\partial_t \dot{\rho}\|_0 |\nabla \dot{\rho}|_2.\end{aligned}$$

Comme $t\|d\|_0 \leqq C$ et $|d\partial_t \dot{\rho}|_1 \leqq C\|d_a + \tilde{d}_a\|_1 |\partial_t \dot{\rho}|_1 + \|\dot{d}\|_0 |\partial_t \dot{\rho}|_1 + \|\partial_t \dot{\rho}\|_0 |\dot{d}|_1$, on obtient l'estimation

$$\left|\frac{\rho'}{\rho} I(d\partial_t \dot{\rho})\right|_2 \leqq C \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}} |\nabla_{x,t} \dot{\rho}|_2.$$

(e) Enfin, montrons que pour toute fonction f,

$$|I(\sum \tilde{\gamma}_{ij} \partial^2_{ij} f)|_0 \leqq C|\nabla f|_0, \qquad \|I(\sum \tilde{\gamma}_{ij} \partial^2_{ij} f)\|_0 \leqq C\|\nabla f\|_0.$$

En effet, $\sum \tilde{\gamma}_{ij} \partial^2_{ij} f = c^2 \Delta f - (I(d))^2 f''$, et $I(c^2 \Delta f) = c^2 f' - I((c^2)' f')$; donc

$$|I(c^2 \Delta f)|_0 \leqq C f'|_0 + Ct\|(c^2)'\|_0 |f'|_0 \leqq C|f'|_0.$$

De plus

$$I((I(d))^2 f'') = (I(d))^2 f' - I\left(I(d)\left(2I'(d) + \frac{I(d)}{r}\right)f'\right),$$

donc $|I((I(d))^2 f'')|_0 \leqq C|f'|_0$.

On obtient ainsi

$$|\rho' I(\sum \tilde{\gamma}_{ij} \partial^2_{ij} \dot{\rho})|_2 \leqq C(\|\nabla \rho_a\|_2 + \|\nabla \dot{\rho}\|_0)|\nabla \dot{\rho}|_2 + C\|\nabla \dot{\rho}\|_0 |\nabla \dot{\rho}|_2$$

et

$$\left|\frac{\rho'}{\rho} I(\sum \tilde{\gamma}_{ij} \partial^2_{ij} \dot{\rho})\right|_2 \leqq C \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}} |\nabla \dot{\rho}|_2.$$

2. Dans F_4, posons $F_4 = \tilde{F}_4 + I(\dot{d})(\bar{\rho} d'_a - \partial_t \rho'_a)$, et montrons l'estimation pour $\tilde{F}_4$ (le terme mis de côté est traité en 4.).

(a) On a

$$\begin{aligned}(D_t \rho)\dot{d} &= (\partial_t \rho + I(d_a + \tilde{d}_a)(\rho'_a + \dot{\rho}') + I(\dot{d})(\rho'_a + \dot{\rho}'))\dot{d} \\ &= (\partial_t \rho_a + I(d_a + \tilde{d}_a)\rho'_a)\dot{d} + (\partial_t \dot{\rho} + I(d_a + \tilde{d}_a)\dot{\rho}')\dot{d} + I(\dot{d})\dot{d}\rho',\end{aligned}$$

d'où

$$|(D_t\rho)\dot d|_2 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\dot d|_2 + C\|\nabla_{x,t}\dot\rho\|_0|\dot d|_2 + C\|\dot d\|_0|\nabla_{x,t}\dot\rho|_2$$
$$+(\|\nabla\rho_a\|_2+\|\nabla\dot\rho\|_0)(\|I(\dot d)\|_0|\dot d|_2 + t\|\dot d\|_0|\dot d|_1)$$
$$+\|I(\dot d)\|_0\|\dot d\|_0|\nabla\dot\rho|_2 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\nabla_{x,t}\dot\rho|_2$$

car $t\|\dot d\|_0 \leqq C$ et $\|I(\dot d)\|_0 \leqq C$.

(b) Compte tenu des estimations de R_a données en (1.3.18), on a facilement

$$|I(\dot d)R_a|_2 = \left|\sum \frac{x_j I(\dot d)}{r}\partial_j R_a\right|_2$$
$$\leqq C\|\nabla R_a\|_1|\dot d|_1 + C|\dot d|_0|\nabla R_a|_2 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\dot d|_1.$$

(c) Le reste $(\rho_a-\bar\rho)\,I(\dot d)\,d_a'$ du terme mis de côté s'estime en:

$$|(\rho_a-\bar\rho)\,I(\dot d)\,d_a'|_2 \leqq C\|\rho_a-\bar\rho\|_2\|d_a'\|_2(t|\dot d|_0+|\dot d|_1) \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\dot d|_1$$

à cause de (1.3.13).

(d) Enfin,

$$\|[\![\dot d]\!]\|_0 \leqq C(\|\dot d\|_0)^2 + C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}\|\dot d\|_0 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}\|\dot d\|_0,$$

$$|[\![\dot d]\!]|_2 \leqq C\|\dot d\|_0|\dot d|_2 + C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\dot d|_2 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\dot d|_2, \text{donc}$$

$$|\rho[\![\dot d]\!]|_2 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\nabla_{x,t}\dot\rho|_2.$$

3. Dans F_5, posons $F_5=\tilde F_5+\dot\rho\,[\bar\rho f'(\rho_a)\,\Delta\rho_a-\partial_t d_a]$, et montrons l'estimation pour $\tilde F_5$ (le terme mis de côté est traité en 4.).

(a) On utilise le lemme suivant:

Lemme. *Si $f=f(r)$ est $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et nulle pour $r\geqq R$,*

(7.1) $$\|f\|_0 \leqq \sqrt{e}(\log(1+R))^{1/2}(|\nabla f|_0+\|\nabla f\|_0).$$

En effet, $f(r)=-\int_r^R f'(s)\,ds$, d'où, pour $0<\lambda<1$,

$$|f(r)|^2 \leqq \frac{1}{1-\lambda}\left(\int_r^R |f'(s)|^2 s^\lambda\,ds\right)R^{1-\lambda};$$

si $r \geqq 1$,

$$\int_r^R |f'(s)|^2 s^\lambda ds \leqq \int_r^R |f'(s)|^2 s\, ds \leqq |\nabla f|_0^2,$$

et si $r \leqq 1$,

$$\int_r^R |f'(s)|^2 s^\lambda ds \leqq |\nabla f|_0^2 + \|\nabla f\|_0^2.$$

Donc le choix $1-\lambda = \dfrac{1}{\log(1+R)}$ *permet de conclure.*

(b) Considérons le terme $\dot\rho(D_a + G_a - I(d_a + \tilde d_a)\, d'_a)$.

D'après le lemme 4.1, $|G_a|_k \leqq C\varepsilon^4$, et $|D_a|_k \leqq C(|J_a|_k + |\partial_t R_a|_k + |R_a|_{k+1})$ d'après (1.3.16). Donc (1.3.18) et (1.3.20) montrent que $|D_a|_k \leqq C\varepsilon^3$. Alors

$$\begin{aligned} |\dot\rho(D_a+G_a)|_2 &\leqq C\|\dot\rho\|_0 |D_a+G_a|_2 + C\|D_a+G_a\|_1 |\nabla\dot\rho|_1 \\ &\leqq C|D_a+G_a|_3 (\log(e+t))^{1/2} |\nabla\dot\rho|_2 \leqq C\varepsilon^2 |\nabla\dot\rho|_2. \end{aligned}$$

Quant au reste, on a facilement

$$\begin{aligned} |\dot\rho I(d_a+\tilde d_a)\, d'_a|_2 &\leqq C\|I(d_a+\tilde d_a)\, d'_a\|_2\, t|\nabla\dot\rho|_0 \\ &\quad + C\|I(d_a+\tilde d_a)\, d'_a\|_1 |\nabla\dot\rho|_2 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\nabla\dot\rho|_2. \end{aligned}$$

(c) Le terme $\rho[f(\rho_a+\dot\rho) - f(\rho_a)]\,\Delta\rho_a - \bar\rho\dot\rho f'(\rho_a)\,\Delta\rho_a$ s'écrit

$$(\rho_a - \bar\rho + \dot\rho)\,\Delta\rho_a[f(\rho_a+\dot\rho) - f(\rho_a)] + \bar\rho\Delta\rho_a[f(\rho_a+\dot\rho) - f(\rho_a) - \dot\rho f'(\rho_a)] = (1)+(2).$$

Or

$$\begin{aligned} &|f(\rho_a+\dot\rho) - f(\rho_a)|_0 \leqq C|\dot\rho|_0, \\ &|\nabla[f(\rho_a+\dot\rho) - f(\rho_a)]|_0 \leqq C(\|\nabla\rho_a\|_0 + \|\nabla\dot\rho\|_0)|\dot\rho|_0 + C|\nabla\dot\rho|_0 \leqq C|\nabla\dot\rho|_0, \\ &|\nabla^2[f(\rho_a+\dot\rho) - f(\rho_a)]|_0 \leqq C|\nabla\dot\rho|_1, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |(\rho_a-\bar\rho)\,\Delta\rho_a[f(\rho_a+\dot\rho) - f(\rho_a)]|_2 &\leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}\, t\,\|\rho_a - \bar\rho\|_2 |\nabla\dot\rho|_1 \\ &\leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\nabla\dot\rho|_1. \end{aligned}$$

Pour (2) et le reste de (1), on a

$$|(2)|_0 \leqq C\|\dot\rho\|_0 |\dot\rho|_0 \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}} \leqq C\|\dot\rho\|_0 |\nabla\dot\rho|_0 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\nabla\dot\rho|_0,$$

et un traitement analogue pour les dérivées. Donc

$$|(1)+(2)|_2 \leqq C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}|\nabla\dot\rho|_1.$$

(d) Les autres termes de $\tilde{F}_5$ se traitent aisément, car le facteur de $\dot{\rho}$ contient deux petits termes.

4. Les termes mis de côté dans F_4 et F_5 sont

$$I(\dot{d})(\bar{\rho}\, d_a' - \partial_t \rho_a') + \dot{\rho}\,[\bar{\rho} f'(\rho_a)\, \Delta \rho_a - \partial_t d_a].$$

Dans leurs estimations en norme H^2, si une dérivée tombe sur $I(\dot{d})$ ou $\dot{\rho}$, le terme correspondant s'estime trivialement.

Il reste à considérer des termes de la forme

$$N = I(\dot{d})\, \partial_x^\alpha(\bar{\rho}\, d_a' - \partial_t \rho_a') + \dot{\rho}\, \partial_x^\alpha[\bar{\rho} f'(\rho_a)\, \Delta \rho_a - \partial_t d_a], \qquad |\alpha| \leqq 2.$$

On va appliquer à ces termes le lemme de localisation 2.2, en utilisant la forme précise des termes ρ_a, d_a décrits en 1.3, et non plus seulement les informations (1.3.13), (1.3.14), (1.3.15) comme on l'a fait jusqu'ici.

En notant (par abus) S_m une fonction de r et t majorée par $C(1+|r-\bar{c}t|)^m$, on peut résumer symboliquement le comportement de ρ_a et d_a dans les diverses zones considérées en 1.3:

(i) En zone I,

$$\rho_a = \bar{\rho} + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \left(\psi - \mu \frac{\sqrt{t}}{2r} \partial_r (\chi r^{1/2} R^2 (r - \bar{c}t)) + \tilde{z} \right)$$
$$- \varepsilon^3 \mu^2 \frac{t}{2r} \partial_r (\chi r^{1/2} (R^2 R')(r - \bar{c}t)),$$

d'où, pour $|\alpha| \geqq 1$,

$$|\partial_x^\alpha \rho_a| \leqq \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}} S_{-3/2} + \varepsilon^2 \left(|\psi| + \frac{S_{-1/2}}{(1+t)^{1/2}} + S_{-2} \right),$$

car le terme de reste $\tilde{z}$ vérifie $\partial_{x,t}^\alpha \tilde{z} = \dfrac{S_{-1/2}}{(1+t)^{1/2}}$ pour $|\alpha| \geqq 1$.

Pour d_a et ses dérivées, la majoration est analogue (sans ψ).

Le lemme 2.2 donne donc, pour une fonction u quelconque supportée dans $r \leqq \mathrm{cte}(1+t)$,

$$|u\, \partial_x^\alpha \rho_a|_0 \leqq C \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}} |\nabla u|_0 + C \varepsilon^2 \|u\|_0$$
$$+ C \frac{\varepsilon^2}{(1+t)^{1/2}} (1+t)^{1/2} |\nabla u|_0 + C \varepsilon^2 |\nabla u|_0,$$

car $\psi = \psi(x)$ est à support compact.

Lorsque $u = \dfrac{x_j I(\dot{d})}{r}$ ou $\dot{\rho}$, on utilise le lemme 3.a pour majorer $\|u\|_0$, et on obtient

$$|N|_0 \leqq C \frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}} (\log(e+t))^{1/2} \{ |\nabla \dot{\rho}|_2 + |\dot{d}|_2 \}$$

grâce au lemme 2.1.

(ii) En zone II,

$$\rho_a=\bar\rho+\varepsilon\left[\left(\rho_1^I+\frac{1}{r}\partial_r(\chi r^{1/2}S(r-\bar c t,\tau))\right)\right]$$
$$+\varepsilon^2\left[\psi+\frac{1}{r}\partial_r(\chi r^{1/2}K(r-\bar c t,\tau))+\tilde z\right],$$

d'où, pour $|\alpha|\geqq 1$,

$$|\partial_x^\alpha \rho_a|\leqq\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}S_{-3/2}+\varepsilon^2\left(|\psi|+\frac{S_{-1/2}}{(1+t)^{1/2}}\right),$$

car K est borné et $\partial_r K=S_{-1/2}$.

Pour d_a et ses dérivées, la majoration est analogue (sans ψ).

On obtient la même chose qu'en zone I, et il en est de même en zone de transition (voir [1] pour tout détail).

5. Enfin,

$$|F_6|_2\leqq C\,\|\rho_a-\bar\rho\|_2\left|\frac{k'}{r}\right|_2\leqq C\frac{\varepsilon^3}{(1+t)^{1/2}}\int_0^t|\nabla_{x,t}\dot\rho|_2\,ds$$

d'après le lemme 6.1. □

8 Estimation des restes et fin de la preuve du théorème 1.3

Reprenons les notations du lemme 3.3, et posons

$$F_a=-2\frac{\bar\rho}{r}\partial_r k_a+\varepsilon^4[\![\psi]\!]+\tilde F_a,$$
$$\tilde F=\tilde F_a+\sum_{i\geqq 3}F_i([\![\psi]\!]\text{ est défini en (1.3.17)}).$$

Définissons alors des fonction $\dot\rho_j$, $0\leqq j\leqq 3$, par les problèmes de Cauchy

$$L\dot\rho_0=-2\frac{\bar\rho}{r}\partial_r k_a+\varepsilon^4[\![\psi]\!],\qquad \dot\rho_0=\partial_t\dot\rho_0=0\quad\text{sur}\quad t=0,$$
$$L\dot\rho_1=F_1,\qquad \dot\rho_1=\partial_t\dot\rho_1=0\quad\text{sur}\quad t=0,$$
$$L\dot\rho_2=F_2,\qquad \dot\rho_2=\partial_t\dot\rho_2=0\quad\text{sur}\quad t=0,$$
$$L\dot\rho_3=\tilde F-2\frac{\rho'}{r}(k+k_a)+2\frac{\rho'}{r}\frac{\rho_a-\bar\rho}{\rho}(k+k_a)-2\rho'\frac{1}{r}\int_0^r(\bar\rho+\dot\rho)(k+k_a)\frac{\rho'}{\rho^2}\,ds$$
$$+\frac{\rho'}{r}\int_0^r\frac{s}{\rho}\{\varepsilon^4[\![\psi]\!]+\tilde F\}\,ds\equiv\tilde G,\qquad \dot\rho_3=\partial_t\dot\rho_3=0\quad\text{sur}\quad t=0.$$

On vérifie facilement que la somme des seconds membres n'est autre que $F+\rho' I\left(\frac{F}{\rho}\right)$, en sorte que $\dot\rho=\sum_{i=0}^{3}\dot\rho_i$.

8.1 Les fonctions $\dot\rho_1$, $\dot\rho_2$ et $\dot\rho_3$ ont en fait déjà été estiméss pour l'essentiel dans les paragraphes précédents. Nous résumons les résultats dans le lemme suivant.

Lemme 8.1 *Il existe un* $\nu_1>0$ *tel que*

$$\sum_{i=1}^{3}|\nabla_{x,t}\dot\rho_i|_2\leqq C\varepsilon^{2+\nu_1}+C\varepsilon|\log\varepsilon|^{1/2}\int_0^t\frac{|\nabla_{x,t}\dot\rho|_2}{(1+s)^{1/2}}\,ds.$$

Preuve. 1. Estimons d'abord $|\tilde G|_2$.

(a) On a $\tilde F_a=\rho_a G_a-2\frac{\rho_a-\bar\rho}{r}\partial_r k_a+I_a+\tilde J_a$, et

$$|G_a|_2\leqq C(\|d_a\|_2+\|\tilde d_a\|_2)|\tilde d_a|_2\leqq C\frac{\varepsilon^{4-\frac{1}{5}}}{1+t}\ \text{(d'après (1.3.18))}.$$

$$\left|\frac{\rho_a-\bar\rho}{r}\partial_r k_a\right|_2\leqq C\left\|\frac{\rho_a-\bar\rho}{r}\partial_r k_a\right\|_2\leqq C\frac{\varepsilon^4}{(1+t)^{1/2}}\ \text{(d'après le lemme 4.2)};$$

Pour majorer $|I_a|_2$, les seuls termes délicats sont du type $|I(\tilde d_a)\,\partial^\alpha_{x,t}\rho_a|_0$, $|\alpha|\geqq 1$; comme on observe sur la forme explicite de ρ_a, d_a (§ 1.3) que $|\partial^\alpha_{x,t}\rho_a|_0\leqq C\varepsilon$, on écrit

$$\begin{aligned}|I(\tilde d_a)\,\partial^\alpha_{x,t}\rho_a|_0&\leqq\|I(\tilde d_a)\|_0|\partial^\alpha_{x,t}\rho_a|_0\leqq C\varepsilon|\tilde d_a|_0\\&\leqq C\frac{\varepsilon^{4-\frac{1}{5}}}{(1+t)^{1/2}}\ \text{(d'après le lemme 2.1)}.\end{aligned}$$

Au total, $|\tilde F_a-\tilde J_a|_2\leqq C\frac{\varepsilon^{4-\frac{1}{5}}}{(1+t)^{1/2}}$, et $|\tilde J_a|_2$ est estimé en (1.3.20).

(b) On obtient sans difficultés, grâce au lemme 6.1

$$\begin{aligned}&\left|-2\frac{\rho'}{r}(k+k_a)+2\frac{\rho'}{r}\frac{\rho_a-\bar\rho}{\rho}(k+k_a)\right|_2\\&\leqq C\frac{\varepsilon^4}{(1+t)^{1/2}}+C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}\left(|\nabla\dot\rho|_2+\varepsilon^2\int_0^t|\dot d|_2\,ds\right).\end{aligned}$$

Les termes contenant des intégrales se traitent comme suit: on a vu au lemme 7.1 que

$$|\rho' I(v)|_2\leqq C(\|\rho_a'\|_2+\|\dot\rho'\|_0)(|I(v)|_0+|v|_1)+C|v|_0|\nabla\dot\rho|_2;$$

ici, $v=\frac{\varepsilon^4 [\![\psi]\!]}{\rho}+\frac{\tilde{F}}{\rho}$, et

$$\left|I\left(\frac{\tilde{F}}{\rho}\right)\right|_0 \leqq C t |\tilde{F}|_0, \quad \left|I\left(\frac{[\![\psi]\!]}{\rho}\right)\right|_0 \leqq C(\log(e+t))^{1/2}$$

(il s'agit de la norme L^2 prise sur $r \leqq \bar{c}t+R_0$). Donc $|\rho' I(v)|_2 \leqq C\left(\frac{\varepsilon^4}{(1+t)^{1/2}}+|\tilde{F}|_1\right)$; l'avant dernière intégrale est négligeable, et au total

$$|\tilde{G}|_2 \leqq C|\tilde{F}|_2 + C\frac{\varepsilon^4}{(1+t)^{1/2}} + C\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}\left(|\nabla \dot{\rho}|_2 + \varepsilon^2 \int_0^t |\dot{d}|_2\, ds\right).$$

2. Estimons $|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_1|_2$.

Comme on l'a noté au §6, $F_1=\sum \partial_i g_i$, $g_i=-2\bar{\rho}\frac{x_i k}{r^2}$. Grâce aux lemmes 5.1 et 5.2, comme $k(r,0)=0$,

$$|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_1|_2 \leqq C\sum \int_0^t |\partial_t g_i|_2\, ds.$$

Or $|\partial_t g_i|_0 \leqq C\left|\frac{\partial_t k}{r}\right|_0$, $|\nabla \partial_t g_i|_0 \leqq C\left|\frac{\partial_t k}{r^2}\right|_0 + C\left|\frac{k'}{r}\right|_0$, $|\nabla^2 \partial_t g_i|_0 \leqq C\left|\partial_t\left(\frac{k}{r^2}\right)'\right|_0$ $+C\left|\partial_t\left(\frac{k'}{r}\right)'\right|_0$, donc d'après le lemme 6.1,

$$|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_1|_2 \leqq C\varepsilon^2 \int_0^t |\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2\, ds,$$

car

$$\varepsilon\|\dot{d}\|_0 + \varepsilon\|d_a+\tilde{d}_a\|_1 + \|\partial_t \tilde{\omega}_a\|_1 \leqq C\frac{\varepsilon^2}{(1+t)^{1/2}} \text{ grâce au lemme 4.2.}$$

3. Estimons $|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_2|_2$.

On a vu que $F_2=\sum \partial_i \tilde{g}_i$, $\tilde{g}_i=-2\dot{\rho}\frac{x_i}{r^2}(k+k_a)$. Comme $k_a(r,0)=0$, on trouve comme plus haut

$$|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_2|_2 \leqq C\sum \int_0^t |\partial_t \tilde{g}_i|_2\, ds.$$

On écrit cette fois

$$\begin{aligned}\left|\partial_t \nabla\left(\frac{x_i k}{r^2}\dot{\rho}\right)\right|_0 &\leqq C\left|\partial_t \frac{\dot{\rho}k}{r^2}\right|_0 + C\left|\frac{\partial_t \partial_r(\dot{\rho}k)}{r}\right|_0 \\ &\leqq C\left\{\left(\left\|\frac{k}{r^2}\right\|_0 + \left\|\frac{k_t}{r}\right\|_0 + \left\|\frac{k'}{r}\right\|_0\right)|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_1 + \|\dot{\rho}\|_0\left(\left|\frac{\partial_t k}{r^2}\right|_0 + \left|\frac{\partial_t k'}{r}\right|_0\right)\right\},\end{aligned}$$

et de même

$$\left|\partial_t \nabla^2\left(\frac{x_i k}{r^2}\dot{\rho}\right)\right|_0 \leqq C\left\{\left(\left\|\frac{k}{r^2}\right\|_0+\left\|\frac{k'}{r}\right\|_0+\left\|\frac{\partial_t k}{r^2}\right\|_0+\left\|\partial_t\frac{k'}{r}\right\|_0\right)|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2\right.$$

$$\left.+\|\nabla_{x,t}\dot{\rho}\|_0\left(\left|\left(\frac{k'}{r}\right)'\right|_0+\left|\left(\frac{k}{r^2}\right)'\right|_0\right)+\|\dot{\rho}\|_0\left(\left|\partial_t\left(\frac{k}{r^2}\right)'\right|_0+\left|\partial_t\left(\frac{k'}{r}\right)'\right|_0\right)\right\}.$$

Grâce au lemme 6.1, on obtient

$$\left|\partial_t \frac{x_i k}{r^2}\dot{\rho}\right|_2 \leqq C\varepsilon^2|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2+C\frac{\varepsilon^3}{(1+t)^{1/2}}\int_0^t|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2\,ds.$$

On trouve de façon analogue

$$\left|\partial_t \frac{x_i k_a}{r^2}\dot{\rho}\right|_2 \leqq C\varepsilon^2|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2,$$

car $|\dot{\rho}|_0 \leqq Ct|\nabla\dot{\rho}|_0$. En résumé,

$$|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_2|_2 \leqq C\varepsilon^2\int_0^t|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2\,ds.$$

4. Finalement, en utilisant les majorations du §7,

$$\begin{aligned}|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_3|_2 &\leqq C\int_0^t|\tilde{G}|_2\,ds \leqq C\int_0^t|\tilde{F}_a-\tilde{J}_a|_2\,ds+C\int_0^t|\tilde{J}_a|_2\,ds\\ &+C\int_0^t\frac{\varepsilon|\log\varepsilon|^{1/2}}{(1+s)^{1/2}}|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2\,ds+C\varepsilon^3\int_0^t\frac{ds}{(1+s)^{1/2}}\left(\int_0^s|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2\,ds\right)\\ &+C\varepsilon^4(1+t)^{1/2} \leqq C\varepsilon^4|\log\varepsilon|^{1/2}(1+t)^{1/2}+C\varepsilon^{2+\nu'}\\ &+C\varepsilon|\log\varepsilon|^{1/2}\int_0^t\frac{1}{(1+s)^{1/2}}|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2\,ds.\end{aligned}$$

On a utilisé ici la propriété fondamentale de $\tilde{J}_a$ rappelée au § 1.3(c), que $\int_0^t|\tilde{J}_a|_2\,ds \leqq C\varepsilon^{2+\nu'}$. □

8.2 Estimation de $|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_0|_2$

Lemme 8.2 *On a* $|\nabla_{x,t}\dot{\rho}_0|_2 \leqq C\varepsilon^3$.

Preuve. Posons $\dot{\rho}_0=\alpha+\varepsilon^4\beta$, où $L\alpha=-2\frac{\bar{\rho}}{r}\partial_r k_a$, $L\beta=[\![\psi]\!]$, avec des traces nulles.

(a) On doit observer que, d'après (3.2.4), et le lemme 4.2, on a en fait

$$\|\partial_t \tilde{\omega}_a\|_1 \leqq C\left(\frac{\varepsilon^2}{1+t^2}+\frac{\varepsilon^3}{(1+t)^{1/2}}\right);$$

donc, en raisonnant comme dans l'estimation de $\dot{\rho}_1$ et en utilisant le lemme 6.1, on obtient

$$|\nabla_{x,t}\,\alpha|_2 \leqq C\int_0^t \left(\frac{\varepsilon^3}{1+s^2}+\frac{\varepsilon^4}{(1+s)^{1/2}}\right) ds \leqq C\varepsilon^3.$$

(b) Ecrivons l'équation sur β sous la forme

$$\Box\quad \beta = [\![\psi]\!] + (c^2(\rho)-c^2(\bar{\rho}))\,\Delta\beta - 2I(d)\,\partial_t\beta' - (I(d))^2\,\beta'',$$

et posons

$$\Box\quad \beta_1 = [\![\psi]\!], \qquad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

- Par l'inégalité d'énergie et l'inégalité $\|I(d)\|_0 \leqq C\dfrac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}$,

$$|\nabla_{x,t}\,\beta_2|_0 \leqq C\varepsilon\int_0^t \frac{1}{(1+s)^{1/2}}|\nabla_{x,t}\,\beta|_1\,ds.$$

- Soit $\gamma(x)$ la solution de $-\bar{c}^2\Delta\gamma = [\![\psi]\!]$, choisie en prenant la convolution avec la solution élémentaire $\log r$. On a $\Box\,\gamma = [\![\psi]\!]$, donc $\Box\,\delta = 0$, $\delta(x,0) = -\gamma$, $\partial_t\,\delta(x,0) = 0$, où l'on a posé $\delta = \beta_1 - \gamma$.

Comme on sait a priori que β_1 est supportée dans $r \leqq \bar{c}t + R_0$, on a

$$|\nabla_{x,t}\,\beta_1(\cdot,t)|_0 = \Big(\int_{|x|\leqq \bar{c}t+R_0} |\nabla_{x,t}\,\beta_1(x,t)|^2\,dx\Big)^{1/2};$$

d'autre part, on peut estimer l'intégrale correspondante pour δ par l'inégalité d'énergie appliquée à un domaine tronconique: il vient

$$\Big(\int_{|x|\leqq \bar{c}t+R_0} |\nabla_{x,t}\,\delta(x,t)|^2\,dx\Big)^{1/2} \leqq C\Big(\int_{|x|\leqq 2\bar{c}t+R_0} |\nabla\gamma(x)|^2\,dx\Big)^{1/2};$$

comme $|\nabla\gamma(r)| \leqq \dfrac{C}{(1+r)}$, on trouve finalement $|\nabla_{x,t}\,\beta_1(\cdot,t)|_0 \leqq C(\log(e+t))^{1/2}$.

- Au total, $|\nabla_{x,t}\,\beta|_0 \leqq C(\log(e+t))^{1/2} + C\varepsilon\displaystyle\int_0^t \frac{|\nabla_{x,t}\,\beta|_1}{(1+s)^{1/2}}\,ds$.
- D'après (5.1.2) et le lemme 5.2,

$$|\nabla_{x,t}\,\beta|_2 \leqq C(\log(e+t))^{1/2} + C\varepsilon\int_0^t \frac{|\nabla_{x,t}\,\beta|_1}{(1+s)^{1/2}}\,ds + C|[\![\psi]\!]|_1,$$

d'où par le lemme de Gronwall, $|\nabla_{x,t}\,\beta|_2 \leqq C(\log(e+t))^{1/2}$. $\Box$

8.3 Fin de la preuve du théorème 1.3

(a) Les lemmes 8.1 et 8.2 impliquent

$$|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2 \leqq C\varepsilon^{2+\nu_1} + C\varepsilon|\log\varepsilon|^{1/2}\int_0^t \frac{|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2}{(1+s)^{1/2}}\,ds.$$

Par le lemme de Gronwall, il vient

$$|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2 \leqq C_A\,\varepsilon^{2+\nu_1} e^{C|\log\varepsilon|^{1/2}} \leqq C_A\,\varepsilon^{2+\nu_2} \quad \text{pour} \quad 0<\nu_2<\nu_1.$$

Pour $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_A$, on a donc en particulier $|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_2 \leqq \frac{1}{2}C_0\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}$, $|\dot{d}|_2 \leqq \frac{1}{2}C_0\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}$ (par le lemme 4.1), $\|\dot{\omega}\|_0 \leqq \frac{1}{2}C_0\,\varepsilon$ (par le lemme 4.2), et $\|\dot{\rho}\|_0 \leqq C|\log\varepsilon|^{1/2}\varepsilon^{2+\nu_2} \leqq \frac{1}{2}C_0\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}$ (par l'inégalité (7.1)). Enfin, comme $\left|F+\rho' I\left(\frac{F}{\rho}\right)\right|_0 \leqq C|F|_0 \leqq C\varepsilon^{2+\nu_3}(\nu_3>0)$, $|L\dot{\rho}|_0 \leqq C\varepsilon^{2+\nu_3}$; d'autre part (notations de (3.2.3)),

$$|\partial_t\dot{d}|_0 \leqq C|\dot{d}|_0 + C|\dot{R}|_0 + C|\partial_t\dot{R}|_0 \leqq C|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_1 + C|L\dot{\rho}|_0,$$

d'où

$$|\partial_t\dot{d}|_0 \leqq C\varepsilon^{2+\nu_3} \leqq \frac{1}{2}C_0\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}$$

pour ε assez petit.

Cela montre que les inégalités (4.1) ne peuvent cesser d'être vraies (c'est l'argument habituel dit «d'induction sur le temps», cf. [5]). Le critère de prolongement de Chemin [3] (qui est trivial dans le cas présent à cause du caractère invariant par rotation des fonctions) montre alors l'existence de la solution pour $t\leqq\frac{A^2}{\varepsilon^2}$ et les estimations de $\dot{\rho}$ dans cet intervalle.

(b) Les estimations (1.3.21) résultent de celles sur $\dot{\rho}$.

Pour (1.3.22), on observe d'abord que $d-d_{app}=\tilde{d}_a+\dot{d}$, et $|\tilde{d}_a|_2 \leqq C\varepsilon^{2+\nu_4}$ $(\nu_4>0)$ par le lemme 4.1.

Considérons $\tilde{\omega}_a$: de (3.2.4) on déduit

$$\partial_t\tilde{\omega}_a = -\varepsilon^2(\omega_1^0 d_1^l + I(d_1^l)\,\omega_1^{0'}) + \tilde{r},$$

où $\tilde{r}$ désigne des termes supportés dans un compact fixe et vérifiant $\|\tilde{r}\|_2 \leqq C\varepsilon^3$; donc

$$\omega-\omega_{app} = \dot{\omega} + \tilde{\omega}_a + \varepsilon^2\int_0^t [\omega_1^0 d_1^l + I(d_1^l)\,\omega_1^{0'}]\,ds = \dot{\omega} + \int_0^t \tilde{r}\,ds,$$

et $|\omega-\omega_{app}|_2 \leqq |\dot{\omega}|_2\; C\varepsilon^3 t \leqq C\varepsilon^3 t$ d'après le lemme 4.2, qui implique aussi (1.3.23).

9 Borne supérieure du temps de vie

9.1 Pour cette étude, il semble plus commode d'introduire les inconnues ρ, $\alpha = I(d)$, $\beta = I(\omega)$ convenablement normalisées, puis d'établir le système gouvernant leurs dérivées. Ces calculs sont résumés dans le lemme suivant.

Lemme 9.1 *Considérons une solution régulière* (ρ, v) *de* (1.1.1).
(a) *Les fonctions* ρ, α, β *satisfont au système*

$$(9.1.1)\qquad \begin{aligned} &\partial_t \rho + \alpha \rho' + \rho d = 0 \\ &\partial_t \alpha + \alpha \alpha' - \frac{\beta^2}{r} + \frac{c^2(\rho)\rho'}{\rho} = 0 \\ &\partial_t \beta + \alpha \beta' + \alpha \frac{\beta}{r} = 0. \end{aligned}$$

(b) *Notons* $\rho = \bar\rho + \dfrac{C}{r^{1/2}}$, $\alpha = \dfrac{A}{r^{1/2}}$, *et* $z_0 = \beta'$,

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{C'}{\rho} + \frac{A'}{c}\right) \\ z_2 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{C'}{\rho} + \frac{A'}{c}\right). \end{aligned}$$

Les fonctions (z_0, z_1, z_2) *satisfont au système*

- $$\partial_t z_0 + \frac{A}{r^{1/2}} z_0' + \frac{C}{r^{1/2}} z_0(z_1 + z_2) + \frac{A z_0}{2r^{3/2}} + \frac{\beta c}{r^{3/2}}(z_1 + z_2) - \frac{3}{2}\frac{\beta A}{r^{5/2}} = 0$$
- $$\partial_t z_1 + \left(\frac{A}{r^{1/2}} + c\right) z_1' + Q = 0,$$

où

$$(9.1.2)\qquad \begin{aligned} Q \equiv{}& (\rho c' + c)\frac{z_1^2}{r^{1/2}} + \frac{z_1 z_2}{r^{1/2}}(c - 3\rho c') \\ & - \frac{z_1}{4r^{3/2}}\left[A\left(5 + \frac{\rho c'}{c}\right) + C\left(5c' + 2\frac{c}{\rho}\right)\right] \\ & + \frac{z_2}{4r^{3/2}}\left[2cr^{1/2} - A\left(1 + \frac{\rho c'}{c}\right) + C\left(4c' - \frac{3c}{\rho}\right)\right] + \frac{1}{4\rho r^2}(cC - \bar\rho A) \\ & + \frac{1}{8cr^{5/2}}(3A^2 + f' C^2) - \frac{\beta z_0}{cr^{1/2}} + \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{cr^{3/2}}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\partial_t z_2 + \left(\frac{A}{r^{1/2}} - c\right) z_2' + (\rho c' + c)\frac{z_2^2}{r^{1/2}} + \frac{z_1 z_2}{r^{1/2}}(c - 3\rho c') \\ &\quad - \frac{z_1}{4r^{3/2}}\left[A\left(1 + \frac{\rho c'}{c}\right) + 3C\left(c' - \frac{c}{\rho}\right) + 2cr^{1/2}\right] \\ &\quad + \frac{z_2}{4r^{3/2}}\left[-A\left(5 + \frac{\rho c'}{c}\right) + C\left(5c' + \frac{c}{\rho}\right)\right] + \frac{1}{4\rho r^2}(cC + \bar\rho A) \\ &\quad + \frac{1}{8cr^{5/2}}(3A^2 + f' C^2) - \frac{\beta z_0}{cr^{1/2}} + \frac{\beta_2}{4cr^{3/2}} = 0. \end{aligned}$$

Preuve. (a) Si l'on note $v=\frac{\alpha}{r}x+\frac{\beta}{r}x^{\perp}$ (voir §1.1), on a la formule $(v\nabla)v = \left(\frac{\alpha\alpha'}{r}-\frac{\beta^2}{r^2}\right)x+\left(\frac{\alpha\beta'}{r}+\frac{\alpha\beta}{r^2}\right)x^{\perp}$, ce qui prouve (9.1.1).

(b) Le système (9.1.2) est obtenu par un calcul direct en dérivant (9.1.1). Les détails sont laissés au lecteur. □

Soit $b<+\infty$; supposons que la solution de (1.1.1), (1.1.2) soit classique pour $0\leqq t\leqq T$, où T vérifie $\frac{1}{\varepsilon}\leqq T\leqq\frac{b^2}{\varepsilon^2}$.

Notons $\Gamma_\lambda^{\pm}$ la coure intégrale (dans le plan (t,r)) du champ $\partial_t\pm(\alpha+c)\,\partial_r$, issue du point $(\lambda,0)$, B la bande du plan comprise entre $\Gamma_{R_0}^{+}$ et $\Gamma_{\sigma_0-1}^{+}$ (σ_0 est défini au théorème 1.2), et $B_\varepsilon=B\cap\left\{t\geqq\frac{1}{\varepsilon}\right\}$. Posons, en imitant Hörmander [5] et John [7, 8], pour $\frac{1}{\varepsilon}\leqq t\leqq T$,

$$J(t)=\sup_{\substack{\frac{1}{\varepsilon}\leqq s\leqq t\\(r,s)\in B}}\int|z_1(r,s)|\,dr,$$

$$M(t)=\sup_{\substack{\frac{1}{\varepsilon}\leqq s\leqq t\\(r,s)\in B}}(\bar\rho\,|A(r,s)|+\bar c\,|C(r,s)|),$$

$$V(t)=\sup_{\substack{\frac{1}{\varepsilon}\leqq s\leqq t\\(r,s)\in B}}s\,|z_2(r,s)|.$$

Ces quantités sont estimées dans le lemme suivant.

Lemme 9.2 *On peut choisir des constantes J_1, M_1, V_1 telles que, pour $t\leqq T$ et $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_b$*

(9.1.3) $$J(t)\leqq J_1\,\varepsilon,\qquad M(t)\leqq M_1\,\varepsilon,\qquad V(t)\leqq V_1\,\varepsilon^{1/2},$$

De plus, $r\geqq\frac{\bar c}{2}t$ dans B pour $t\geqq\frac{1}{\varepsilon}$.

Preuve. On raisonne par induction sur le temps, à partir de $t=\frac{1}{\varepsilon}$. On montrera d'abord que (9.1.3) est vrai pour $\frac{1}{\varepsilon}\leqq t\leqq\frac{2}{\varepsilon}$; puis on supposera (9.1.3) vrai pour $\frac{1}{\varepsilon}\leqq t\leqq T'\leqq T$, et on développera les conséquences.

1. Vérification de (9.1.3) pour $\frac{1}{\varepsilon}\leqq t\leqq\frac{2}{\varepsilon}$.

On utilise le théorème 1.3 qui décrit le comportement de la solution (on est ici en «zone I»): $\rho=\rho_a^I+\dot\rho$, $d=d_a^I+\tilde d_a+\dot d$,

$$2z_1=r^{1/2}\left[\frac{\rho_a^{I'}+\dot\rho'}{\rho}+\frac{I'(d)}{c}\right]+\frac{1}{2r^{1/2}}\left[\frac{\rho_a^I-\bar\rho+\dot\rho}{\rho}+\frac{I(d)}{c}\right],$$

$$2z_2=r^{1/2}\left[-\frac{\rho_a^{I'}+\dot\rho'}{\rho}+\frac{I'(d)}{c}\right]+\frac{1}{2r^{1/2}}\left[-\frac{\rho_a^I-\bar\rho+\dot\rho}{\rho}+\frac{I(d)}{c}\right].$$

Pour z_2, on observe que

$$t\left|2z_2-r^{1/2}\left[\frac{I'(d_a^I)}{c}-\frac{\rho_a^{I'}}{\rho}\right]\right|\leqq \text{cte}\{t^{3/2}\varepsilon^2+\varepsilon\}\leqq \text{cte}\,\varepsilon^{1/2};$$

par ailleurs

$$\frac{I'(d_a^I)}{c}-\frac{\rho_a^{I'}}{\rho}=\frac{1}{\rho c}\{(\rho-\bar\rho)\,I'(d_a^I)-(c-\bar c)\,\rho_a^{I'}+\bar\rho I'(d_a^I)-\bar c\rho_a^{I'}\};$$

les termes en $\rho-\bar\rho$, $c-\bar c$ sont négligeables et

$$\bar\rho I'(d_a^I)-\bar c\rho_a^{I'}=\varepsilon(\bar\rho d_1-\bar c\rho_1')+\varepsilon^2(\bar\rho d_2-\bar c\rho_2')+\varepsilon^3(\bar\rho d_3-\bar c\rho_3')-\bar\rho\,\frac{I(d_a^I)}{r}.$$

Comme $\bar\rho d_1-\bar c\rho_1'=-\partial_t\rho_1-\bar c\rho_1'=-(\partial_t+\bar c\partial_r)\left(\rho_1-\frac{R(r-\bar c t)}{r^{1/2}}\right)+\frac{\bar c R}{2r^{3/2}}$, et $\left|(\partial_t+\bar c\partial_r)\left(\rho_1-\frac{R}{r^{1/2}}\right)\right|\leqq\frac{\text{cte}}{t^{3/2}}$ grâce aux propriétés asymptotiques des solutions de l'equation des ondes (cf. par exemple [1, §2]), on trouve finalement $t|z_2|\leqq \text{cte}(\varepsilon+\varepsilon^2 t^{3/2})\leqq \text{cte}\,\varepsilon^{1/2}$.

Comme la largeur de B est bornée par un nombre fixe, la majoration évidente $|z_1|\leqq \text{cte}\,\varepsilon$ suffit à contrôler $J(t)$.

Enfin, $|A|+|C|\leqq r^{1/2}(|I(d)|+|\rho-\bar\rho|)\leqq \text{cte}\,\varepsilon$.

On choisit dorénavant

$$\text{(9.1.4)}\qquad M_1=\bar\rho\bar c^2 J_1,\qquad V_1=J_1\quad\text{et}\quad J\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\leqq J_1\,\frac{\varepsilon}{4},$$
$$M\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\leqq\bar\rho\bar c^2\,\frac{J_1\,\varepsilon}{4},\qquad V\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\leqq\frac{J_1\,\varepsilon^{1/2}}{4}.$$

2. Etudions $\left(\text{pour } \frac{1}{\varepsilon}\leqq t\leqq T'\leqq T\right)$ les conséquences géométriques de (9.1.3).

- Pour $0\leqq t\leqq T'$ dans B, on a $\left|c(\rho)+\frac{A}{r^{1/2}}-\bar c\right|\leqq \text{cte}\,\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}$;

le long d'une courbe Γ_λ^+ dans B , on a donc $\left|\frac{d}{dt}(r-\bar c t-\lambda)\right|\leqq \text{cte}\,\frac{\varepsilon}{(1+t)^{1/2}}$, soit $|r-\bar c t-\lambda|\leqq \text{cte}\,\varepsilon(1+t)^{1/2}\leqq \text{cte}$. En particulier, pour $t\geqq\frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{r}{t}\geqq\bar c-O(\varepsilon)\geqq\frac{3\bar c}{4}$ pour ε petit.

- Le long d'une courbe Γ_μ^- de B_ε, on a de même $\left|\frac{d}{dt}(r+\bar c t-\mu)\right|\leqq \text{cte}\,\frac{\varepsilon}{t^{1/2}}$, d'où $t'\leqq t$,

$$|r(t)+\bar c t-\mu-(r(t')+\bar c t'-\mu)|\leqq \text{cte}\,\varepsilon(t^{1/2}-t'^{1/2})\leqq \text{cte}.$$

Si l'on note $t_s(x,t) \leqq t$ l'ordonnée du point où la courbe Γ_μ^- issue de (x,t) sort de B_ε, on a $|r(t_s)+\bar{c}\,t_s-\mu| \leqq$ cte; donc, pour deux points (r,t), (r',t') de B_ε appartenant à la même courbe Γ_μ^-, avec $t' \leqq t$, on a

$$2\bar{c}(t-t') = r+\bar{c}\,t-\mu-(r'+\bar{c}\,t'-\mu)+r'-\bar{c}\,t'-\lambda'-(r-\bar{c}\,t-\lambda)+\lambda'-\lambda,$$

d'où $t-t' \leqq$ cte; en particulier $t' \geqq \frac{t}{2}$ pour ε petit.

● Dans B_ε, on a $z_0=\beta\equiv 0$, car une courbe intégrale du champ $\partial_t+\alpha\partial_r$ issue d'un point de cette zone coupe $t=\frac{1}{\varepsilon}$ en un point où $r \geqq \frac{3\bar{c}}{4\varepsilon}$, et l'on sait par le théorème 1.3 que β est nulle en un tel point.

3. Pour évaluer les intégrales de $|z_1|$ sur des courbes de B, on écrit (avec les notations de (9.1.2))

$$d(z_1(dr+\mu\,dt)) = \left[\left(\frac{A}{r^{1/2}}+c+\mu\right)z_1'+z_1\,\mu'+Q\right]dr\wedge dt.$$

Pour $\mu=-\frac{A}{r^{1/2}}-c$, on trouve

$$\begin{aligned} d(z_1(dr+\mu\,dt)) = \Bigg\{ & -2\rho c'\,\frac{z_1 z_2}{r^{1/2}} - \frac{z_1}{4r^{3/2}}\left[A\left(3+\frac{\rho c'}{c}\right)+C\left(3c'-2\frac{c}{\rho}\right)\right] \\ & + \frac{z_2}{4r^{3/2}}\left[2cr^{1/2}-A\left(1+\frac{\rho c'}{c}\right)+C\left(4c'-\frac{3c}{\rho}\right)\right] \\ & + \frac{1}{4\rho r^2}(cC-\bar{\rho}A)+\frac{1}{8cr^{5/2}}(3A^2+f'C^2)-\frac{\beta z_0}{cr^{1/2}} \\ & + \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{cr^{3/2}}\Bigg\}\,dr\wedge dt \equiv \tilde{Q}\,dr\wedge dt. \end{aligned}$$

On en déduit, comme dans [5]:

(i) $$\int_{(r,t)\in B} |z_1(r,t)|\,dr \leqq J\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\int_{\substack{\frac{1}{\varepsilon}\leqq s\leqq t \\ (r,s)\in B}} |\tilde{Q}|\,dr\,ds.$$

(ii) $$\text{cte} \int_{\Gamma^-(x,t)\cap B\cap\{t\geqq\frac{1}{\varepsilon}\}} \leqq J\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\int_{\substack{\frac{1}{\varepsilon}\leqq s\leqq t \\ (r,s)\in B}} |\tilde{Q}|\,dr\,ds,$$ où $\Gamma^-(x,t)$

désigne la partie de la courbe intégrale de $\partial_t-(\alpha+c)\,\partial_r$, issue du point $(x,t)\in B_\varepsilon$, sur laquelle $s\leqq t$.

4. On a, dans B_ε

$$|\tilde{Q}| \leqq \text{cte}\left\{|z_1|\left(V_1\frac{\varepsilon^{1/2}}{t^{3/2}}+M_1\frac{\varepsilon}{t^{3/2}}\right)+\frac{V_1\,\varepsilon^{1/2}}{t^2}\left(1+\frac{M_1\,\varepsilon}{t^{1/2}}\right)+\left(M_1\frac{\varepsilon}{t^2}+M_1^2\frac{\varepsilon^2}{t^{5/2}}\right)\right\}$$

donc

$$\int_{\substack{\frac{1}{\varepsilon}\leqq s\leqq t\\(r,s)\in B}} |\tilde{Q}|\,dr\,ds \leqq \text{cte}\{J_1\,\varepsilon^2(v_1+M_1\,\varepsilon^{1/2})+V_1\,\varepsilon^{3/2}(1+M_1) + M_1\,\varepsilon^2(1+M_1)\} \leqq \text{cte}\,J_1\,\varepsilon^{3/2}$$

pour ε petit.

De 3 (i) on déduit alors

$$J(t) \leqq J\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \int_{\dots} |\tilde{Q}|\,dr\,ds \leqq J_1\,\frac{\varepsilon}{4} + \text{cte}\,J_1\,\varepsilon^{3/2} \leqq \frac{1}{2}\,J_1\,\varepsilon$$

pour ε assez petit.

5. On a

$$\partial_t A + \left(\frac{A}{r^{1/2}} - c\right) A' = -2c^2 z_1 + \frac{A^2}{2r^{3/2}} + \frac{\beta^2}{r^{1/2}} + f\,\frac{C}{2r},$$

$$\partial_t C + \left(\frac{A}{r^{1/2}} - c\right) C' = -2c\rho z_1 + -\rho\,\frac{A}{2r}.$$

En intégrant de long de $\Gamma^-(x,t)$ entre $t_s(x,t)$ et t, il vient

$$|A(x,t)| \leqq |A(r(t_s),t_s)| + (2\bar{c}^2 + O(\varepsilon)) \int_{t_s}^{t} |z_1(r(s),s)|\,ds + \text{cte}\,M_1\,\varepsilon^2 + \text{cte}\,\varepsilon \int_{t_s}^{t} |C|\,ds,$$

$$|C(x,t)| \leqq |C(r(t_s),t_s)| + (2\bar{c}\bar{\rho} + O(\varepsilon)) \int_{t_s}^{t} |z_1(r(s),s)|\,ds + \text{cte}\,\varepsilon \int_{t_s}^{t} |A|\,ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall à la fonction $\bar{\rho}|A(r(t),t)| + \bar{c}|C(r(t),t)|$ (la courbe Γ^- étant fixée), il vient

$$(\bar{\rho}|A| + \bar{c}|C|)(x,t) \leqq M\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(1+O(\varepsilon)) + 2\bar{c}^2\bar{\rho}(1+O(\varepsilon))\left\{J\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \text{cte}\,J_1\,\varepsilon^{3/2}\right\} + \text{cte}\,M_1\,\varepsilon^2,$$

car si $t_s > \frac{1}{\varepsilon}$, A et C au point $(r(t_s), t_s)$ sont nuls.

Donc

$$M(t) \leqq \left\{\bar{\rho}\bar{c}^2\,\frac{J_1\,\varepsilon}{4} + \frac{1}{2}\bar{c}^2\,\bar{\rho}J_1\,\varepsilon(1+O(\varepsilon^{1/2})\right\}(1+O(\varepsilon)) + \text{cte}\,M_1\,\varepsilon^2 \leqq \frac{7}{8}M_1\,\varepsilon$$

si ε est assez petit.

6. Enfin, en utilisant (9.1.2) et en raisonnant comme en 5., on obtient grâce aux considérations géométriques de 2.,

$$|z_2(x,t)| \leqq |z_2(r(t_s),t_s)| + \text{cte}\left\{V_1^2 \frac{\varepsilon}{t^{5/2}} + \frac{M_1 V_1 \varepsilon^{3/2}}{t^{5/2}} + \frac{M_1 \varepsilon}{t^2} + \frac{M_1^2 \varepsilon^2}{t^{5/2}}\right\}$$
$$+\left(\text{cte } V_1 \frac{\varepsilon^{1/2}}{t^{3/2}} + \text{cte} \frac{M_1 \varepsilon}{t^{3/2}} + \frac{1+O(\varepsilon)}{t}\right) \int_{t_s}^{t} |z_1(r(s),s)|\, ds.$$

Comme

$$t|z_2(r(t_s),t_s)| \leqq \left(\text{cte} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \varepsilon V\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leqq \frac{J_1 \varepsilon^{1/2}}{4}(1+O(\varepsilon)),$$

il vient

$$V(t) \leqq \frac{V_1 \varepsilon^{1/2}}{4}(1+O(\varepsilon)) + (1+O(\varepsilon))\left(V_1 \frac{\varepsilon}{4} + \text{cte } V_1 \varepsilon^{3/2}\right) + \text{cte } V_1 \varepsilon \leqq \frac{1}{2} V_1 \varepsilon^{1/2}$$

si ε est assez petit. □

La dernière étape de la preuve consiste à considérer, le long de la courbe $\Gamma_{\sigma_0}^+ \subset B$, la fonction $w(t) = -z_1(r(t),t)$; de (9.1.2), on déduit que w satisfait pour $t \geqq \frac{1}{\varepsilon}$ une équation différentielle de la forme

$$w'(t) = a_0(t)\, w^2 + a_1(t)\, w + a_2(t),$$

où

$$a_0(t) = \left(\frac{\rho c' + c}{r^{1/2}}\right)(r(t),t) = \frac{\bar\rho c'(\bar\rho) + \bar c}{\bar c^{1/2} t^{1/2}} + O(t^{-3/2}),$$

$$|a_1(t)| \leqq \text{cte} \frac{\varepsilon^{1/2}}{t^{3/2}}, \qquad |a_2(t)| \leqq \text{cte} \frac{\varepsilon^{1/2}}{t^2}$$

d'après le lemme 9.2.

La valeur initiale vaut, d'après le théorème 1.3,

$$w\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\varepsilon \frac{R'(\sigma_0)}{\bar\rho} + o(\varepsilon).$$

Le lemme 1.3.2 de [6] s'applique, car $\int_{1/\varepsilon}^{T} |a_1(t)|\, dt \leqq \text{cte}\, \varepsilon$, $\int_{1/\varepsilon}^{T} |a_2(t)|\, dt \leqq \text{cte}\, \varepsilon^{3/2}$: on en déduit

$$\int_{1/\varepsilon}^{T} |a_0(t)|\, dt \leqq (1+O(\varepsilon)) \frac{\bar\rho}{\varepsilon(-R'(\sigma_0))},$$

soit finalement

$$\varepsilon T^{1/2} \leqq \frac{\bar{\rho}\,\bar{c}^{1/2}}{2(\bar{\rho}\,c'(\bar{\rho})+\bar{c})} \frac{1}{-R'(\sigma_0)} + o(1) = \tau^* + o(1),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Références

1. Alinhac, S.: Une solution approchée en grand temps des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux. Commun. Partial. Differ. Equations **17** (3 & 4), 447–490 (1992)
2. Alinhac, S.: Approximation et temps de vie des solutions des équations d'Euler isentropiques en dimension deux d'espace. Séminaire d'EDP. Paris: Ecole Polytechnique, Février 1991
3. Chemin, J.Y.: Remarques sur l'apparition de singularités dans les écoulements eulériens compressibles. (Preprint 1989)
4. Courant, R., Friedrichs, K.O.: Supersonic flow and shock waves. New York: Wiley-Interscience 1949
5. Hörmander, L.: The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations. Mittag-Leffler report n°5 (1985)
6. Hörmander, L.: Non linear hyperbolic differential equations. Lectures (1986–1987)
7. John, F.: Formation of singularities in one dimensional linear wave propagation. Commun. Pure Appl. Math. **27**, 377–405 (1974)
8. John, F.: Blow up of radial solutions of $u_{tt}=c^2(u_t)\,\Delta u$ in three space dimenisons. (Preprint 1984)
9. Klainerman, S.: Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation. Commun. Pure Appl. Math. **38**, 321–332 (1985)
10. Lax, P.D.: Hyperbolic systems of conservation laws II. Commun. Pure Appl. Math. **10**, 537–566 (1957)
11. Majda, A.: Compressible fluid flow and systems of conservation laws. (Appl. Math. Sci., vol. 53) Berlin Heidelberg New York: Springer 1984
12. Sideris, T.: Formation of singularities in three dimensional compressible fluids. Commun. Math. Phys. **101**, 475–487 (1985)